ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN DESDE EL SIGNIFICADO COMO MEDIDA

NATALIA JANNETH RICO MARTÍNEZ

UNIVERSIDAD EXTERNADO DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

PROGRAMA DE MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

BOGOTÁ

2017

ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN DESDE EL SIGNIFICADO COMO MEDIDA

NATALIA JANNETH RICO MARTÍNEZ

Tesis para optar por el título de Magister en educación con el énfasis en Lectoescritura y Matemáticas

ASESOR: MARCO ANTONIO FERIA URIBE

UNIVERSIDAD EXTERNADO DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

PROGRAMA DE MAESTRÍA EN EDUCACIÓN

BOGOTÁ

2017

Agradecimientos

Agradezco a mi familia, porque me han dado fortaleza y apoyo incondicional para el logro de mis metas como docente e investigadora. Especialmente a mi madre y esposo, por estar pendiente durante todo este proceso, sin su apoyo todo sería más difícil. También estoy en deuda con Diana Martínez Magister en Docencia de la Matemática por su escucha y ayuda incondicional en la preparación de este escrito.

Un especial agradecimiento al profesor Marco Antonio Feria, mi asesor de tesis, por su comprensión y dedicación, por su gran ejemplo de disciplina y exigencia académica, por todas sus enseñanzas y por el gran ser humano que nos permitió conocer, Dios le bendiga siempre.

Finalmente doy las gracias a los estudiantes de grado sexto, por su participación y dedicación con el desarrollo de las actividades propuestas en este estudio.

Natalia Rico Martínez

.

Tabla de contenido

Lista de tablas

Lista de registros

Lista de Anexos

Introducción

Los números Racionales, son un conjunto numérico importante dentro del desarrollo del pensamiento numérico, y en particular, desde la investigación en educación matemática, son las fracciones consideradas como facilitadoras de su construcción en el contexto escolar; pues promueve el uso de diferentes significados de gran utilidad en la vida práctica como el manejo de decimales, porcentajes, razones, proporciones, repartos, probabilidades, etc.

En documentos oficiales se citan temáticas y conceptos en relación con los números racionales que deben ser abordadas en las aulas de clase (MEN, 2006), sin embargo, en las formas tradicionales de enseñanza sólo se pone el énfasis en la mecanización de reglas y algoritmos que llevan es a la repetición sin sentido, fuente de conceptualizaciones erróneas por parte de los estudiantes (Obando, 2003).

Ciertamente, los procesos enseñanza y aprendizaje de las fracciones son asuntos complejos; dicha complejidad está relacionada con el hecho de que la fracción presenta diferentes significados. De los cuales, en las prácticas de enseñanza se destaca el predominio del significado parte-todo, una estrategia que permite una introducción rápida de la representación simbólica de la fracción y abreviar los periodos de instrucción (Escolano & Gairin, 2005), pero que por ende trae dificultades por parte de los estudiantes, donde se construye el significado de las fracciones desde las propiedades físicas de los objetos que actúan y no desde las relaciones cuantitativas entre ellos. Pese a que, cualquier definición inicial que se adopte no satisface todos los casos en los cuales se hará uso de los diferentes significados relacionados al concepto de fracción (Fandiño, 2009), si es necesario seguir investigando un camino más eficaz, con propuestas de trabajo progresivas y relacionadas que desencadene procesos de aprendizaje más significativos en los estudiantes.

Considerando lo anterior, en esta investigación se desarrolló una propuesta alternativa, diferente a la tradicional, estructurada desde el significado de la fracción como medida, que permitió desde esta perspectiva aportar algunos aspectos a los procesos de enseñanza y mejorar el aprendizaje del concepto de fracciones en estudiantes de grado sexto.

A continuación, se reportan, a través de cinco capítulos, aspectos de la investigación realizada. El primer capítulo plantea la necesidad de seguir investigando acerca de las fracciones, la pregunta, los objetivos de la investigación y los antecedentes de la investigación. El segundo capítulo presenta las definiciones relacionadas al concepto de fracción como medida, representaciones, contextos y didáctica. El tercer capítulo describe el diseño metodológico en el que a partir de la investigación acción se busca cumplir con los objetivos propuestos, los participantes, el diseño de la propuesta y las categorías de análisis. El cuarto capítulo expone los hallazgos y resultados encontrados en la implementación del trabajo de campo. En el quinto capítulo se presentan las conclusiones que dan cuenta de la incidencia del trabajo de la fracción como medida en los procesos de aprendizaje de los estudiantes y de elementos necesarios para la enseñanza inicial de los números Racionales.

Línea de investigación

Esta investigación se enmarca en la línea Pedagogía Didáctica del Lenguaje, las Matemáticas y las Ciencias, describe elementos didácticos que aportan a mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las fracciones en la escuela básica y propone una nueva mirada a la aproximación del concepto de las fracciones desde el significado como medida.

1. Problema de investigación

1.1. Planteamiento del problema

Las investigaciones sobre procesos de enseñanza-aprendizaje de fracciones, ha sido uno de los más estudiados en la educación matemática, pese a ello, éste sigue siendo un tema complejo, en el que persisten dificultades en los estudiantes para comprender el concepto de fracción en la escuela y en los docentes para enseñarlas.

Dicha complejidad está relacionada con el hecho de que el concepto de fracción presenta distintos significados o interpretaciones que deben ser explorados y puestos en relación unos con los otros. De tal manera, que al pretender dar una "definición" inicial definitiva del concepto, como lo afirma Fandiño (2009), esta elección no tiene la fuerza para satisfacer todos los significados que el término asumirá en el curso de los estudios. En este mismo sentido Llinares (2003) plantea que la dificultad en la enseñanza-aprendizaje de las fracciones radica en que "están relacionadas con diferentes tipos de situaciones (situaciones de medida, con el significado de parte de un todo, o como parte de un conjunto de objetos, de reparto utilizadas como cociente, como índice comparativo usadas como razón, y como un operador)" (pág. 188).

La propuesta de Kieren (1980) y sus cinco interpretaciones: *parte-todo*, *razón*, *cociente*, *operador* y *medida*; ha sido, durante mucho tiempo, el sustento teórico de diversos trabajos sobre fracciones, sin embargo, de esas diversas interpretaciones, la que se ha enfatizado en la enseñanza es la de fracción parte-todo. Este énfasis se evidencia no sólo en las prácticas docentes sino además en libros de texto y en investigaciones como lo sustenta Guispe, Gallardo, y González (2010).

En estudios recientes, se ha cuestionado que priorizar la enseñanza de la fracción desde relación parte-todo, no permite una abstracción de éste hacia el número racional, ni a una comprensión total del concepto de fracción, pues no facilita pasar a otras interpretaciones ni generan una conexión entre una y otra (Escolano & Gairin, 2005).

En consecuencia, prevalecer la relación parte todo en la enseñanza ha hecho que otras interpretaciones (que también son necesarias) no se trabajen. Encontrándose, por ejemplo, gran ausencia en el trabajo de la interpretación de fracción como medida, que en su mayoría de veces ha sido delegada únicamente al trabajo con la recta numérica.

Históricamente las prácticas de medición fueron la fuente para el reconocimiento de las fracciones como número, Obando (2003). Es así, que sería pertinente una cercanía inicial en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las fracciones desde esta perspectiva. Pues, la fracción como medida se interpreta como un número que expresa la cantidad de magnitud en relación con una unidad de medida. Por ejemplo, la fracción $\frac{3}{4}$ puede representar 3 unidades de $\frac{1}{4}$ y no como 3 partes de las 4 divididas, lo que superaría errores recurrentes que presentan los estudiantes al ver la fracción como dos números naturales separados por una raya, resultado de un doble conteo; además da sentido, de forma natural, al reconocimiento de fracciones impropias, fracciones equivalentes y operaciones como la adición y la multiplicación de fracciones, aspectos que hasta el momento llevan dificultades.

Por lo tanto, esta investigación se delimitó el trabajo de las fracciones desde el significado de medida considerándolo como punto de partida en los procesos de enseñanza - aprendizaje de las fracciones, buscando favorecer aprendizajes más significativos en los estudiantes y proponer elementos para la organización de la enseñanza inicial del concepto dentro del contexto escolar.

1.2. Pregunta de investigación

¿Cómo incide una secuencia de actividades estructurada desde el significado de fracción como medida en los procesos de enseñanza y de aprendizaje inicial de los números racionales en estudiantes de grado sexto del Colegio Policarpa Salavarrieta?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo general

Describir elementos didácticos que subyacen en una secuencia de actividades estructurada desde el significado de fracción como medida, su incidencia en la enseñanza y aprendizaje del concepto de fracción en estudiantes de grado sexto del Colegio Policarpa Salavarrieta.

1.3.2. Objetivos específicos

- Identificar las dificultades que presentan los estudiantes de grado sexto del colegio Policarpa Salavarrieta respecto al concepto de fracción.
- Diseñar y aplicar una secuencia de actividades estructurada desde el significado de fracción como medida a estudiantes de grado sexto.
- Evaluar los alcances de la secuencia de actividades, con relación a los cambios en el aprendizaje de los estudiantes de grado sexto respecto al concepto de fracción.

1.4. Antecedentes del problema

Para el desarrollo de esta investigación es necesario reconocer las investigaciones que se han realizado en los últimos años sobre las fracciones y su enseñanza en la escuela. Estos trabajos no sólo aportan a la orientación de esta investigación, sino que también contribuyen con aspectos conceptuales y didácticos que posiblemente permitan producir nuevas ideas para abordar la pregunta que se plantea.

Reflexionar sobre las dificultades en la comprensión el concepto de las fracciones en el contexto escolar ha suscitado el pensar sobre cómo iniciar la enseñanza de las fracciones en la escuela y su incidencia en el aprendizaje. Frente a estos cuestionamientos se han desarrollado una gran cantidad de investigaciones que pretendiendo responder a estos y otros interrogantes, reconocen la importancia de las diferentes interpretaciones y representaciones que el concepto abarca.

En ese sentido Obando (2003) presenta en su investigación una reflexión sobre la enseñanza del concepto de fracción, donde detectó que la forma tradicional como se orientan tales procesos en la escuela es fuente de errores por parte de los estudiantes. Desde este análisis desarrolla una propuesta de trabajo y pese a que establece como primeramente el estudio de las fracciones desde la relación parte-todo, se resalta de su estudio la importancia que se da al concepto de fracción como puente de entrada a los números racionales y, por otro lado, el considerar los procesos de medición como un elemento importante para la conceptualización de las fracciones.

Describe la fracción desde la relación parte-todo como un número que expresa la relación cuantitativa entre una cierta cantidad tomada como todo y otra cantidad tomada como parte. De tal manera que esa relación cuantitativa implica un proceso de medición.

Desde esta perspectiva, Obando (2003) mediante una indagación desde la historia, desde el currículo en matemáticas y desde la mirada de los estudiantes, expone algunas estrategias que han sido consideradas significativas para el diseño de una secuencia de actividades. Tales como, recuperar para la enseñanza de los números racionales los aspectos relacionados con la medida, el tratamiento cuidadoso del tipo de magnitud (discreta-continua), el tipo de unidad y discriminar actividades con magnitudes de colecciones y magnitudes continuas como procesos distintos. De igual manera, reconoce que desde la relación parte- todo, la propuesta presenta una debilidad para conceptualizar aspectos relativos a la estructura multiplicativa de los números racionales.

Por otro lado, los investigadores Escolano & Gairín (2005) refieren en su estudio cómo el trabajo de las fracciones desde la relación parte-todo ha obstaculizado el avance del concepto de fracción a racional, exponen 5 problemáticas que se han generado al priorizar su enseñanza:

i. La mayoría de ejercicios propuestos hacen que se adquiera el concepto de forma visual, las tareas se presentan con gráficos, donde alguna parte esta sombreada. Ignorando la medida de las magnitudes, llevando al estudiante a dos recuentos las partes que forman el todo y las sombreadas, en otras situaciones.
ii. No hay un reconocimiento de la unidad, las figuras suelen presentarse superpuestas y claramente diferenciadas bajo el atributo del color.
iii. Se refuerza el sentido de número natural por el doble recuento.
iv. La fracción no tiene estatus de número porque la entiende como una situación descriptiva que utiliza dos números naturales.
v. Promueve el aprendizaje pasivo, la relación parte-todo presenta una situación estática entre cantidades de superficie. . (Escolano & Gairin, pág. 20)

Además, exponen en su estudio como la relación parte-todo no tiene significados de medida, de cociente, de razón y de operador. Deduciendo que la relación parte-todo surge de las prácticas educativas, como un recurso didáctico a las necesidades de abreviar los periodos de instrucción de las fracciones y como una forma rápida de representar de forma simbólica la fracción. Para corroborar sus ideas presentan una propuesta didáctica que se apoya en tres modelos de enseñanza, fracción como medida para introducir las fracciones, el modelo cociente para las conexiones entre nociones fraccionarias y decimal y el modelo razón para construir ideas de proporcionalidad aritmética, con el objetivo principal de incrementar la comprensión del concepto de número racional. Dentro de sus resultados presentan el avance significativo que obtuvieron los niños y la no presencia de las dificultades señaladas anteriormente.

Escolano y Gairín (2005) desde la experiencia con niños de primaria durante tres años de escolaridad, justifican la importancia del trabajo de la fracción como medida y dejan de manifiesto la necesidad de crear propuestas alternativas desde otra perspectiva diferente a la enseñanza tradicional de fracciones como relación parte - todo.

De manera más general, el estudio de Perea y Valdemoro (2009) titulado “Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de Educación Primaria”, presenta el desarrollo de un estudio de caso realizado a tres niños. Donde se implementó y evaluó una propuesta basada en situaciones cotidianas con el fin de favorecer en los estudiantes el significado de fracción como medida, fracción como cociente y fracción como operador. Los autores concluyeron que, ante actividades de medida los estudiantes lograron encontrar y determinar fracciones en contextos de longitud y resolver sin problema actividades de partición donde habían tenido dificultades. En relación con las actividades con cociente los niños lograron habilidades para repartir un todo continuo o discretos en determinado número de personas, mostraron reconocer el orden y la equivalencia en dos repartos diferentes. Respecto a las actividades de operador los estudiantes ampliaron o disminuyeron a la mitad los lados de las figuras presentadas. Se destaca de su investigación la importancia que se le da a la actividad de partición considerándola rudimentaria para que los niños puedan resolver las tareas planteadas, además basados en Streefland (1993) los autores confirman que los conocimientos previos que tienen los niños favorecen la construcción de la noción de fracción en la enseñanza y exponen la importancia del trabajo grupal como creación de ambientes de confianza donde se da la oportunidad de expresar sus estrategias de solución y aceptar sus equivocaciones.

1.5. Contexto y justificación del problema

Los números racionales son un conjunto numérico de gran importancia dentro de la matemática, puesto que son el sustento para la construcción de números reales, conjunto donde se desarrolla todo el estudio de variación y modelación matemática de muchas situaciones de la cotidianidad y de las ciencias que usan formulas, funciones y modelos basados en decimales, porcentajes, razones y estadísticos para describir un hecho. Pero son las fracciones la idea intuitiva que ha permitido darles significado y sentido como número, tanto que, como lo afirma Freudenthal (1994) son consideradas la base fenomenológica del número racional.

Por otro lado, al analizar los Estándares Básicos de Competencia en Matemáticas (MEN, 2006), para grado sexto y séptimo, se establece que en esta etapa los estudiantes deben adquirir una serie de competencias en el manejo operacional y de propiedades de los números racionales, utilizándolos en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales, o porcentajes), para resolver problemas de medida.

En este contexto y considerando que una posible consecuencia de la enseñanza de la fracción desde relación parte-todo es que los estudiantes continúen con dificultades asociados al entendimiento de número racional. El trabajo con fracciones tiene mucho que ofrecer a la comunidad de la educación matemática (Fandiño, 2009).

Por lo tanto, la importancia de esta investigación consiste básicamente en que establece una opción de trabajo de las fracciones desde otra perspectiva diferente a la tradicional, y propone una secuencia de actividades para la enseñanza inicial de la fracción desde el significado de medida, buscando potenciar procesos de aprendizaje más significativos en los estudiantes.

2. Marco referencial

Para abordar la pregunta problema, se han trazado dos categorías desde donde teóricamente se va sustentar la investigación: *a nivel histórico:* el surgimiento de las fracciones a través de la historia con el fin de identificar elementos conceptuales que los han incorporado como objetos matemáticos, y *a nivel didáctico*: se describe las diferentes interpretaciones del concepto de fracción, conceptos asociados al concepto de fracción como medida; dificultades que presentan los estudiantes ante situaciones con fracciones, componentes didácticos que se van a tener en cuenta para el diseño y evaluación de la secuencia de actividades y sistemas de representación que permiten identificar conceptos y situaciones que dan significado al número.

2.1. Nivel histórico

2.1.1. Recuento histórico de las fracciones. Gairín (2001) asegura que el rasgo que caracterizó a los egipcios de manera casi inmediata es el uso de las fracciones unitarias, es decir, de fracciones cuyo numerador igual a uno, extrae desde el papiro Rhind que la base de la representación de una fracción se encontraba en la descomposición como suma de fracciones de numerador 1. Se han dado diferentes teorías para justificar el uso de este tipo de fracciones en Egipto, lo que deduce el autor, según los estudios, es que las fracciones egipcias constituyen un sistema de representación simbólico con el que se expresan las cantidades positivas no enteras, que demandaba el uso de tablas y conversiones, lo que llevan a pensar que fue un sistema de representación que se construyó como necesidad para resolver situaciones problemáticas cotidianas de repartos igualitarios y de medida.

Por otra parte, se distingue que para realizar mediciones los babilonios disponían de una unidad y de múltiplos y submúltiplos sexagesimales de la misma, por lo que el resultado se expresaba mediante cantidades enteras y fracciones sexagesimales. Para los griegos, sólo eran "números" los naturales mayores que uno. No existían las fracciones, como números. Aceptaban la fracción como razones homogéneas entre números naturales y estaban relacionadas especialmente con la medida. Según Obando (2003), el pensamiento griego condujo a una conceptualización muy particular de la noción de *unidad*: Unidad aritmética donde el número estaba ligado a lo discreto, es decir a lo contable y unidad geométrica donde la magnitud estaba ligada a lo continuo, es decir a lo medible.

A finales del siglo XVI, Simón Stevin (1548-1620) matemático reconocido por ser uno de los primeros que desarrolló y divulgó las fracciones decimales expresadas por medio de números decimales: diseña un sistema de medida que permitió posteriormente consolidar los sistemas de medida en todas las regiones, y que además facilitara el cálculo necesario en las mediciones y, por ende, en las transacciones comerciales. De acuerdo con Freudenthal, citado en Castaño (2014), "en las propuestas de Simón Stevin, las fracciones decimales se conectaron estrechamente a un sistema decimal de medida".

A principios del siglo XVII, y las técnicas de cálculo desarrolladas por los números decimales eran usados en procesos de medición. Este proceso llevo a Simón Stevin a identificar la unidad geométrica de los procesos de medición, con la unidad aritmética y borra las fronteras entre lo continuo y lo discreto. Los números decimales se impusieron en casi todos los países, al adoptarse el sistema métrico decimal en el siglo XVIII. La formalización del número racional llegó en el siglo XIX, los números racionales se expresan de dos formas diferentes, como fracción y con notación decimal.

A partir de la revisión histórica se pueden reconocer las siguientes características:

- Las fracciones unitarias han sido usadas como representación inicial de las fracciones.

- La separación del número-magnitud llevo a considerar dos elementos cuya relación es primordial para la comprensión de número racional: la unidad discreta y la unidad continua.
- Las fracciones no sólo han sido usadas en situaciones de reparto, sino que las prácticas sociales de la medición fueron una fuente importante para avanzar en la construcción del concepto.

2.2. Nivel didáctico

2.2.1. Significados asociados a las fracciones. Las fracciones como un par ordenado de números enteros escritos de la forma $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$. Han sido utilizados en diferentes contextos y situaciones, que pueden parecer diferentes pero que se han descrito como indispensables en el proceso de conceptualización del número racional (Llinares & Sanchez, 1997). Entre los diferentes trabajos que han abordado la interpretación de los números racionales desde diferentes perspectivas, se han identificado cinco significados de las fracciones constatados por autores como Behr, Harel, Post y Lesh (1993), Escolano &Gairín (2005) y Kieren (1980): Fracción como Relación Parte-todo, Fracción como razón, Fracción como cociente, Fracción como operador y Fracción como medida.

A continuación, se describe cada una de las interpretaciones, sin embargo, es de aclarar que el trabajo de campo (secuencia de actividades) enfatizará en la última interpretación explicada en este apartado, debido a la imposibilidad de abordar en una sola investigación el estudio de tal conceptualización.

Fracción como relación parte-todo. La fracción parte-todo se considera como un todo “continuo o discreto” que se divide en partes iguales indicando esencialmente la relación existente entre el todo y un número designado de partes. La fracción, por tanto, es la parte en sí misma y no, una relación entre dos cantidades: la medida de la parte con respecto a la medida del todo.

Fracción como razón. Es una comparación entre dos cantidades o conjuntos de unidades (de igual o diferente magnitud). Las razones pueden ser comparaciones parte-parte en un conjunto (magnitud discreta) o comparaciones parte-todo (magnitud continua y discreta).

Fracción como cociente. La fracción como cociente indicado es el resultado de dividir uno o varios objetos entre un número de personas o partes en una acción de reparto, y considerar las fracciones como los elementos de una estructura algebraica; es decir, como los elementos de un conjunto numérico en el que se ha definido una relación de equivalencia.

Fracción como operador. Un número racional actuando sobre una parte, un grupo o un número, modificándolo. Así, la fracción $\frac{a}{b}$ empleada como operador es el número que modifica un valor particular n multiplicándolo por a y dividiéndolo por b.

Fracción como medida. La fracción como medida es reconocida como la asignación de un número a una cantidad de región o a una cantidad de magnitud (de una, dos o tres dimensiones), producto de la partición equitativa de una unidad. De tal manera, que la fracción $\frac{a}{b}$ es a veces $\frac{1}{b}$, es decir como la interacción de a unidades de tamaño $\frac{1}{b}$ y no solamente la percepción de $\frac{a}{b}$ como a partes de b divididas. Es de anotar que aquí se caracteriza a los números racionales positivos (que llamaremos fracciones) de tal manera que $\frac{1}{n}$ es la n-ésima parte exacta de la unidad si y sólo si n veces $\frac{1}{n}$ es igual a 1

2.2.2 Conceptos relacionados a la fracción como medida. **Magnitud y medida.** *La Matemática de las Cantidades* definida por Schwartz (1976, 1988) citado en Obando (2003) es la perspectiva en la que se plantea que las unidades de medida y la magnitud de las cantidades son determinantes para dar significado a las relaciones numéricas y las operaciones en la aritmética. Desde esta óptica, los autores Behr, et al. (1993), en particular, para el estudio de fracciones proponen tener en cuenta elementos como el tipo de unidad (simple o compuesta) y el tipo de magnitud (discreta o continua).

De ahí que asumiremos las siguientes definiciones: “Magnitud es cualquier aspecto de las cosas que puede expresarse cuantitativamente, como la longitud, el peso, densidad, etc.; la cantidad es el valor de dichas variables en un objeto particular, por lo tanto, medir una cantidad consiste en determinar las veces que esa cantidad contiene a la cantidad que toman como referencia (unidades de medida).” (Godino, Batanero, & Roa, 2003, pág. 616)

Regularmente una magnitud puede describirse en forma cuantitativa continua o en forma cuantitativa discreta; en el primer caso, se habla de magnitudes continuas como son la longitud, la superficie, el peso, el volumen, la masa, etc. En el segundo caso, se habla de magnitudes discretas como son las colecciones de objetos o personas.

Godino, et al. (2003), sugiere que medir cantidades es esencial en el proceso de cuantificación de la realidad, proceso que se ve facilitado por la reducción de las cantidades a números, con los cuales podemos pensar como si se tratara con las cantidades originales. Este proceso de medir cantidades sugiere la utilización de unidades que serán el referente o término comparativo que permitirá cuantificar la cantidad.

Situaciones de medida. León (2011) asocia dos tipos de situaciones de medida relacionadas con las fracciones, que tendremos en cuenta para el desarrollo de las actividades:

- <u>Por Fraccionamiento</u>: Medir utilizando múltiplos y submúltiplos de la unidad: En estas situaciones existe una cantidad de magnitud a medir que no equivale a la unidad o alguno de sus múltiplos. Para precisar más la medida se divide la unidad en partes iguales y si una cantidad de magnitud mide $\frac{a}{b}$ unidades quiere decir que dividiendo la unidad en b partes iguales la cantidad de magnitud a medir equivale a un número a de dichas partes.

- <u>Por conmensurabilidad</u>: Medir haciendo comparaciones con la unidad: Situaciones de medida en las que se comparan dos cantidades de una magnitud, estableciendo cuántas veces tiene que ser repetida cada una de ellas para obtener dos cantidades iguales.

Medidas de longitud y medidas de superficie. Según Chamorro (1995) para el tratamiento de la medida de longitud y de superficies hay que tener en cuenta los siguientes supuestos:

Para medir una longitud:

- Aislar la longitud a medir de otras cualidades que tenga el objeto.
- Hacer estimación de la longitud real del objeto en relación con el instrumento de medida, con el fin de buscar uno con mayor precisión.

Para medir una superficie:

- Reconocer la superficie del objeto independiente de otras cualidades.
- Reconocer la equivalencia de superficies por transformaciones de tipo cortar y pegar.
- Transformar una superficie en otra equivalente, pero de distinta forma.
- Pavimentar una superficie con otra, la unidad, sin superponer piezas

Técnicas de medición. A continuación, referenciadas en Godino, et al. (2003) Se presentan algunas técnicas o herramientas que pueden ser utilizadas para realizar mediciones:

- Medición directa. Medir con instrumentos, utilizando estrategias y unidades convencionales y no convencionales, eligiendo la unidad más adecuada para la expresión de una medida aplicando reiteradamente las unidades de medida hasta lograr cubrir la longitud que se quiere medir, hasta conseguir cubrir toda la superficie, etc., y según la precisión deseada.

- Medición indirecta. Desarrollar, comprender y usar fórmulas para resolver problemas utilizando las unidades de medida más usuales, convirtiendo unas unidades en otras de la misma magnitud, expresando los resultados en las unidades de medida más adecuadas.

En particular para esta investigación, se reconocen los siguientes elementos para el desarrollo de la secuencia de actividades en el aula. Por un lado, se hará referencia a magnitudes discretas y magnitudes continuas de longitud y superficie. Se han escogido estas magnitudes porque se ajustan al nivel de escolaridad de los estudiantes. Por otro lado, las situaciones propuestas serán de tipo conmensurable buscando que el proceso de medición que utilicen los estudiantes sea de forma directa, de tal forma que este no sea un inconveniente y detenga la resolución de los problemas propuestos.

2.2.3. Dificultades en el aprendizaje de las fracciones. Entendiendo las dificultades como una circunstancia que impide o entorpece la consecución de los objetivos de aprendizaje previstos. A continuación, se enuncia algunas dificultades presentadas por Fandiño (2009) identificadas de investigaciones en didáctica de la matemática del contexto internacional, que serán referente, a la hora de crear la secuencia de actividades y el análisis de resultados de la prueba diagnóstico y la prueba final.

1. **Dificultades en el ordenamiento de las fracciones y los números decimales:** Una dificultad que se presenta en estudiantes de cualquier edad es la de ordenar las fracciones, lo números decimales o los dos mezclados, una de las causas encontradas es el intento del

estudiante de adaptar la idea tan intuitiva de "sucesivo" que sucedía con éxito en los números naturales que ya no funciona en los números racionales.

2. **Dificultades en la realización de las operaciones entre fracciones.** Suma de numeradores y denominadores de forma directa.
3. **Dificultades en el reconocimiento de esquemas**: los usos de esquemas no siempre son explicativos y entre ellos algunos son más difíciles de interpretar que otros y son más negativas cuando se trata de situaciones discretas.
4. **Dificultades en la gestión del adjetivo "igual"**: representar $^1/_5$ en un cuadrado, es una situación que se le dificulta al estudiante, ya que las formas de la unidad no responden de forma inmediata a una división de 5 partes.
5. **Dificultades en la gestión de la equivalencia.**
6. **Dificultades en la gestión de la fracción irreductible, la reducción a los mínimos términos.** Dificultad en comprender los procesos de simplificación y amplificación de las fracciones.
7. **Dificultades en la gestión de figuras no estándar**. El privilegiar para las instrucciones el uso de figuras estándar lleva a bloqueos cuando se presentan figuras poco convencionales.
8. **Dificultades al pasar de una fracción a la unidad que la generó.**
9. **Dificultades en la gestión autónoma o espontanea de esquemas, figuras o modelos.** El uso de diferentes registros semióticos.

2.2.4. Componentes didácticos para el diseño secuencia de actividades. El esquema ternario de Frege (1996) las ideas de signo, sentido y referencia, establece que los diferentes significados de un concepto matemático vienen dados por las estructuras conceptuales en que se inserta -referencia-, por los sistemas de símbolos que lo representan -signos-, y por los objetos y fenómenos de los que surge-sentido. Siendo no éste el único supuesto, encontramos la propuesta de Duval (1999) citado en Fandiño (2009).quien reduce la triada a la pareja signo-Objeto considerando que el término significado agrupa los significantes del mismo objeto, por lo tanto signo y significado son intercambiables. De donde se entiende que "no hay concepto sin signo" y más general "cada concepto remite a signos dentro de otros sistemas de signos"

Al respecto Llinares (2003), afirma: "El dominio de las fracciones hace parte de un campo conceptual constituido por un conjunto de situaciones cuyo dominio progresivo requiere la utilización de una variedad de procedimientos, de conceptos y de representaciones que están en estrecha conexión (pág. 189)"

Por lo tanto, en la reflexión sobre las fracciones, y en particular el significado del concepto de fracción como medida, se adecuaron las ideas anteriores mediante la terna: Estructura Conceptual-Representaciones y contextos, con la cual se diseña, implementa y evalúa la secuencia de actividades propuesta. En los aspectos conceptuales se incluyen conceptos, propiedades, procedimientos y relaciones entre los conceptos, que estarán señaladas más adelante en el diseño de la propuesta.

Representaciones: Los conceptos se muestran a través de diferentes tipos de registros: verbal, gráfico, numérico, y manipulativo. Contextos: Se han identificado como situaciones que le dan sentido al concepto, entre ellas situaciones de medida en magnitudes discretas, magnitudes continuas de longitud y magnitudes de superficie.

2.2.5. Sistemas de Representación. Las representaciones son las producciones constituidas por el empleo de signos, son el medio por el cual el individuo dispone de medios e instrumentos para exteriorizar sus representaciones mentales, para hacerlas visibles y accesibles a otros. Las representaciones son parte esencial de la estructura conceptual necesaria para poder realizar un análisis de los procesos de comprensión, aprendizaje y asignación de significados que llevan a cabo los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas. Rico & Castro (2006).

Un sistema de representación se entiende como las diferentes maneras en las que se puede representar un objeto por medio de signos y sus relaciones con otros objetos matemáticos.

Según Duval (1999) la capacidad que tiene un individuo para construir significados por medio de sistemas de representación se evidencia en la medida en que le permita las tres acciones siguientes:

1. **Identificación:** consiste en el reconocimiento de las representaciones que se presentan ante el sujeto, lo que implica una selección de rasgos en el contenido a representar.
2. **Tratamiento**: consiste en la transformación de una representación en otra del mismo registro.
3. **Conversión**: consiste en la transformación de una representación de un registro a otro registro semiótico.

Se puede afirmar que la producción y comprensión matemática, está ligada al desarrollo de estas tres actividades cognitivas. Al respecto, Fandiño (2009) recomienda que en las prácticas pedagógicas es necesario enseñar al estudiante a manejar diferentes registros semiótico para tratar de construir un concepto, de hacerlos explícitos, uno a uno con su especificidad y no creer que se van a presentar de forma espontánea ya que requiere de una didáctica particular. Las representaciones semióticas que se trabajan, para efectos de esta investigación son:

- **Representación verbal** El sistema de representación verbal se caracteriza por el uso del lenguaje oral y escrito, permitiendo enunciar hechos relacionados con el foco de contenido.

- **Representación numérica**: permite expresar mediante valores numéricos los elementos y relaciones del foco de contenido.
- **Representación gráfica**: uso relaciones métricas y espaciales geométricas, mediante tablas o figuras geométricas.
- **Representación manipulativa**: permite hacer construcciones con ayuda de recursos tecnológicos o materiales y posibilita que los estudiantes manipulen las construcciones hechas y visualicen nuevas propiedades que no son evidentes en otras representaciones.

3. Diseño metodológico

3.1. Enfoque de investigación

Bajo el diseño y aplicación de una secuencia de actividades la presente investigación se enmarca en el paradigma de investigación cualitativa, no sólo busca identificar y describir elementos didácticos necesarios para los procesos de enseñanza-aprendizaje del concepto de fracción en estudiantes de grado sexto; sino que busca una reflexión constante de los medios utilizados en el aula y la estructuración de la enseñanza en relación con las dificultades que presentan los estudiantes.

3.2. Tipo de investigación

La metodología implementada para el desarrollo de esta propuesta es la Investigación-Acción planteada como "el estudio de una situación social con el fin de mejorar la calidad de la acción dentro de la misma" (Elliott, 2005). En este caso, desde el planteamiento del problema se ve la necesidad de implementar nuevas alternativas que fortalezcan los procesos de enseñanza-aprendizaje del concepto de fracción y permitan superar las dificultades que presentan constantemente los estudiantes.

Las fases metodológicas con las que se desarrolló el trabajo de campo están integradas por tres momentos interrelacionados: Diagnóstico, acción y evaluación.

Fase 1. ***Diagnóstico****:* se identifica el estado de conocimiento que tienen los estudiantes del concepto de fracción.

Fase 2. ***La acción*****:** Diseño y aplicación práctica de la secuencia de actividades, en donde los estudiantes se enfrentaron a cada una de las situaciones estructuradas desde el significado de fracción como medida.

Fase 3: Evaluación: Mediante la observación registrada en instrumentos como el diario de clase y el diario del profesor se realiza la recopilación y categorización de datos donde se supervisa las acciones de los estudiantes ante las situaciones propuestas, de tal manera, que permita informar acerca de la organización del tema, las representaciones usadas y la instrucción didáctica.

3.3. Participantes

La investigación se desarrolló con estudiantes de sexto grado del Colegio Policarpa Salavarrieta, ubicado en Bogotá, concretamente, participaron 24 estudiantes que integran el curso 601 de la institución, los cuales en su mayoría son de la localidad y su proceso se ha dado en la sede de primaria de la misma institución. Se escogió este grupo debido a que cumple con características como el rango de edad que esta entre 11 a 14 años, son el grupo que instruye en su momento la investigadora y una de las temáticas dentro de la malla curricular de grado sexto son las fracciones.

3.4. Consideraciones éticas

El proceso inicio con una carta de autorización hacia los padres de familia de los participantes, avalada antes por la rectoría del colegio, quienes conocieron los objetivos e intereses de la investigación y libremente aceptaron la participación de sus hijos o acudido en esta propuesta de trabajo que no presentaba ningún riesgo físico ni moral para los asistentes. (Ver Anexo 1)

3.5. Fase 1: Diagnóstico

El objetivo fundamental fue realizar una mirada detallada a los estudiantes, con el fin de identificar sus conocimientos previos y dificultades al enfrentarse a situaciones relacionadas con las fracciones. Para ello, se aplicó una prueba escrita de 13 preguntas abiertas tomadas de García & Mayorga (1997). Ver Anexo 2.

Las preguntas fueron clasificadas para analizar aspectos conceptuales, procedimentales y de representación relacionados con las fracciones (es posible que una pregunta pueda ser clasificada en más de un aspecto) como lo indica la

Tabla 1:

Tabla 1 Estructura de la prueba diagnóstico

Aspectos	**Indicador**	**Contexto discreto**	**Contexto continuo área**	**Contexto continuo lineales**
Conceptuales	Usa adecuadamente la notación fraccionaria.	Pregunta3 Pregunta5	Pregunta 1	Pregunta 6
	Reconoce Fracciones impropias (mayores de la unidad).		Pregunta 11	
	Identifica		Pregunta 13	

	Fracciones equivalentes			
Procedimentales	Reconoce partes iguales.	Preguntas 3, 4, 5	Pregunta 1, 2	Preguntas 6,7,8
	Reconstruye la unidad a partir de una parte dada.			Pregunta 9,10
	Compara las fracciones por su cantidad		Pregunta 12	
Representaciones	Realiza conversión de un registro gráfico a numérico	Preguntas 3,5	Pregunta 1	Pregunta 6
	Realiza conversión de un registro numérico a gráfico		Preguntas 2, 11	Preguntas 7,8
	Trata el sistema de representación en un mismo registro para dar solución a una situación propuesta.	Preguntas 4,5	Preguntas 12,13	Preguntas 9,10

Para el análisis de resultados, se realizó una indagación bibliográfica sobre investigaciones realizadas al respecto, referente principal Fandiño (2009) . Esto permitió (entre otros resultados) interpretar el nivel inicial de los estudiantes, así como las dificultades respecto al objeto de estudio de la investigación. Además, orientó a la formulación de algunos elementos a tener en cuenta en el diseño de la secuencia de actividades.

3.6. Resultados obtenidos en la prueba diagnóstico

La prueba (Anexo 2) se aplicó a 24 estudiantes de grado sexto. De las 13 preguntas sólo el 37% de los estudiantes obtuvieron 8 o más respuestas correctas. De donde se puede deducir que hay un número significativo de estudiantes con dificultades para reconocer conceptos, realizar procesos y representar situaciones relacionadas con las fracciones, corroborando la necesidad de realizar un trabajo al respecto.

Pese a que la tabulación de resultados se realizó teniendo en cuenta respuestas correctas e incorrectas. Los resultados se describen en detalle a partir de los indicadores creados en cada clasificación.

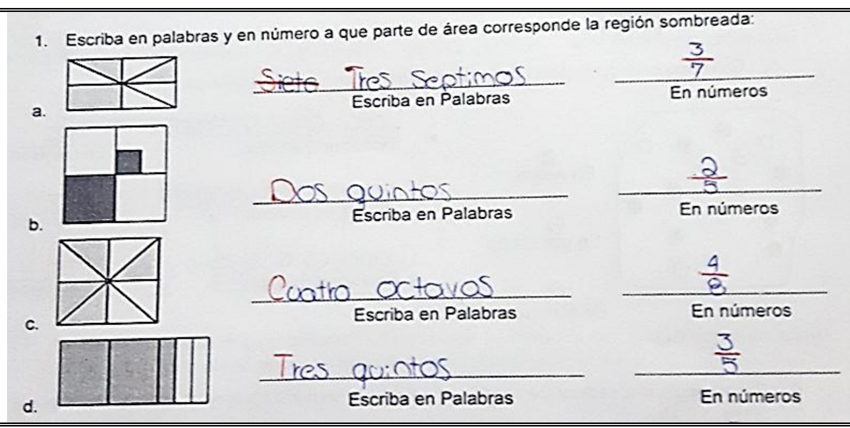
3.6.1 Aspectos conceptuales. En la **Tabla 2** se presenta los indicadores que se tuvieron en cuenta para evaluar los aspectos conceptuales, el porcentaje de estudiantes que alcanzaron el indicador y la o las preguntas correspondientes.

Tabla 2 *Porcentaje de estudiantes que alcanzaron los indicadores conceptuales*

Indicador	**Contexto discreto**	**Contexto continuo área**	**Contexto continuo lineales**
Uso adecuado de la notación fraccionaria.	Pregunta 3 y 5	Pregunta 1	Pregunta 6
	54%	33%	33%
Reconoce fracciones impropias (mayores de la unidad).		Pregunta 11	
		30%	
Identifica Fracciones equivalentes.		Pregunta 13	
		33%	

Se ha clasificado la notación fraccionaria dentro del aspecto conceptual porque la escritura que utilizan los estudiantes permite ver el uso y significado que están dando a esta convención. A la luz de los resultados se puede observar un porcentaje sobresaliente del uso de una escritura adecuada de la fracción en contextos discretos diferente a lo que se presenta en contextos continuos. Los estudiantes a través del conteo expresan mediante una fracción la representación dada en contextos discretos. Sin embargo, este mismo proceso los lleva a incurrir en errores para el caso de situaciones de contextos continuos tanto de área como de longitud puesto que los estudiantes mediante el conteo de regiones señaladas y no señaladas expresan la fracción sin reconocer partes iguales como una característica importante, encontrando que para contextos continuos sólo el 33% hace uso adecuado de la notación fraccionaria, el 59% de los estudiantes usan expresiones de la forma $\frac{a}{b}$ para indicar el conteo de las partes sombreadas sobre el número de partes en que está dividida sin tener en cuenta su área, el 8% utiliza otras escrituras.

Para el caso de contextos discreto el 54% de los estudiantes realizan una escritura adecuada de las fracciones y el 46% restante expresa el número de partes señaladas y el número de partes no sombreadas, sin discriminar numerador y denominador. Por lo tanto, se puede deducir que los estudiantes no están utilizando la notación fracción para comunicar una relación cuantitativa entre la cantidad parte y la cantidad total. El Registro 1 presenta un ejemplo, de un estudiante que hace uso de la notación fraccionaria para expresar mediante un doble conteo las partes sombreadas y las partes divididas.

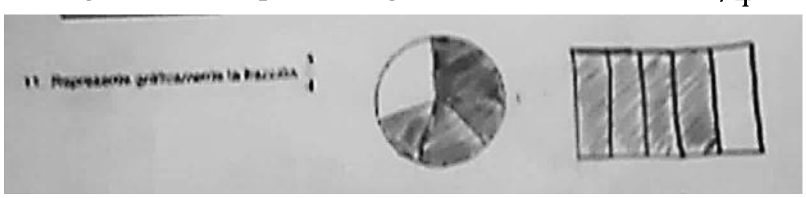


***Registro 1**. Ejemplo, notación fraccionaria*

Se observa que el estudiante hace una representación numérica adecuada sólo en el ítem c, ya que la figura está dividida en partes iguales.

Respecto a las *fracciones impropias* uno de los conceptos relevantes para identificar el nivel conceptual que tienen los estudiantes de las fracciones. Se encontró que sólo el 30% logró representar gráficamente y de manera correcta, la fracción $\frac{5}{4}$. Los estudiantes están viendo la fracción como dos números naturales separados por una raya, de ahí que $\frac{5}{4}$ ó $\frac{4}{5}$ representa lo mismo para ellos. Entonces, al pedirles que realizaran una representación gráfica de la fracción $\frac{5}{4}$, tomaron una unidad (en su mayoría un rectángulo) la dividieron en 5 partes y señalaron 4, en otros casos dividieron la unidad en 4 pero al ver que debían señalar cinco tomaron una parte de ella y la repartieron, el Registro 2 presenta algunos de sus procesos.

Pregunta 11: "Representar gráficamente la fracción ${}^{5}\!/_{4}$"

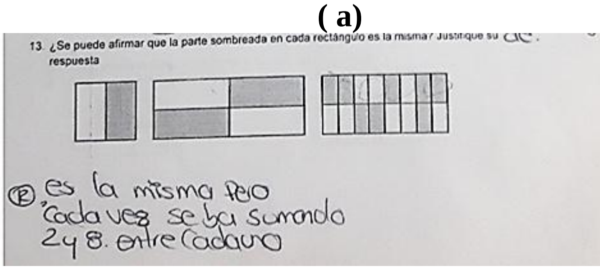
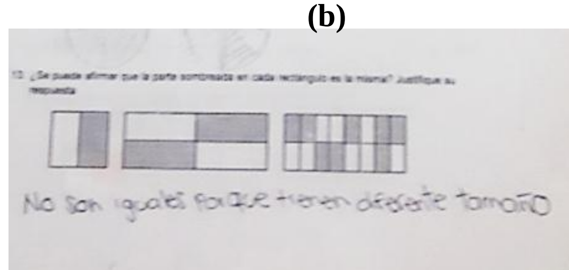


Registro 2*. Ejemplo de fracciones impropias*

En este sentido, Obando (2003) plantea que el trabajo centrado en la partición y el conteo hacen que el proceso de conceptualizar las fracciones impropias sea de difícil comprensión para los alumnos. "Si el denominador indica el número de partes en las que se divide la unidad, y el numerador la cantidad de partes que se toman, entonces ¿cómo poder tomar una cantidad de partes que sea mayor de las que se obtuvieron al dividir la unidad?" (Obando, 2003, pág. 170).

Por otro lado, lo afirma Fandiño (2009), la fracción impropia dentro de la perspectiva de la fracción como relación parte-todo no pertenece a las fracciones "concretas" ya que, el estudiante está construyendo el significado como algo que se obtiene fraccionando y no puede aceptar que ésta representación pueda asimilarse a un número.

Finalmente, en relación a las **fracciones equivalentes** consideradas como uno de los conceptos necesarios para la conceptualización posterior de operaciones entre fracciones, se observó que los estudiantes no hacen un reconocimiento de la unidad con la que trabajan. Por ejemplo, ante la pregunta 13: ¿es posible afirmar que la parte sombreada en cada rectángulo es la misma?, el 67% de los estudiantes se dejó llevar en su mayoría por el tamaño y la congruencia de las partes y no realizan una relación cuantitativa entre la cantidad de partes y la cantidad total, esto los llevó a concluir que no son equivalentes, lo cual es erróneo. En el Registro 3a y 3 b) se ilustran algunas de las respuestas encontradas.

<table>
<tr><td colspan="2">Pregunta 13: ¿se puede afirmar que la parte sombreada en cada rectángulo es la misma? Justifique</td></tr>
<tr><td>(a)

</td><td>(b)

</td></tr>
</table>

Registro 3. *Respuestas dadas por los estudiantes ante fracciones equivalentes*

En acuerdo con Obando (2003) esta dificultad es consecuencia de los procesos de enseñanza desarrollados en la escuela, donde muchas veces no se da un tratamiento cuidadoso del tipo de unidad, ni del tipo de magnitud, y aun de forma más compleja cuando se trabaja con contextos discretos.

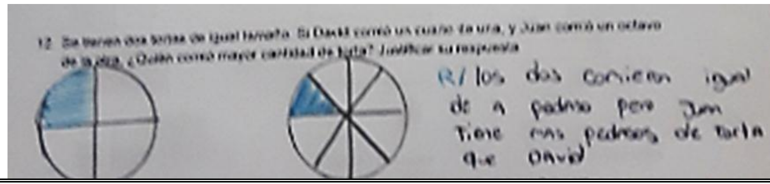
3.6.2. Aspectos procedimentales. Para analizar las destrezas que utilizan y han desarrollado los estudiantes ante situaciones que involucran fracciones, se establecieron tres indicadores considerados necesarios para el trabajo con las fracciones. En la

Tabla 3 se presenta el porcentaje de estudiantes que alcanzaron en su totalidad el indicador respondiendo correctamente las preguntas correspondientes.

Tabla 3 *Porcentaje de estudiantes que alcanzaron indicadores procedimentales.*

Indicador	Contexto discreto	% N=24	Contexto continuo área	% N=24	Contexto continuo lineales	% N=24
Reconoce la importancia de las partes iguales para determinar la fracción.	Preguntas 3 Pregunta 4 pregunta 5	58% 40% 50%	Pregunta 1 Pregunta 2	33% 60%	Presuntas 6 Pregunta 7 Pregunta 8	33% 38% 4%
	Promedio	49%	Promedio	46 %	Promedio	25 %
Reconstruye la unidad a partir de las partes dadas.					Pregunta 9 Pregunta 10	4% 17%
					Promedio	11 %
Compara las fracciones por su cantidad			Pregunta 12	38%		

Reconocimiento de partes iguales: La mayoría de los estudiantes escriben la fracción en relación con el conteo del número de partes sombreadas y el número de partes que está dividida la unidad, (descuidando si son partes iguales) modelo que no les permite reconocer la fracción como un sólo número. Como lo afirman Escolano y Gairín (2005) el poner la atención en actividades de partir y contar, los estudiantes siempre centraran el proceso en el número natural y no en el de fracción, como se observó en el **Registro 1**.



Reconstrucción de la unidad: Ante la pregunta: Este pedazo de cuerda es $\frac{2}{3}$ de la cuerda completa. ¿Cuál es el largo de la cuerda completa? La mayoría de los estudiantes trataron de señalar $\frac{2}{3}$ sobre el segmento. De donde se evidenció dificultades en aproximadamente el 90% de los estudiantes para pasar de una fracción a la unidad que la generó tanto en contextos continuos como discretos. El **Registro 4** ilustra como el estudiante interpreta la pregunta y realiza una amplificación del número por tres.

Registro 4. *Ejemplo de respuesta a reconstrucción de la unidad*

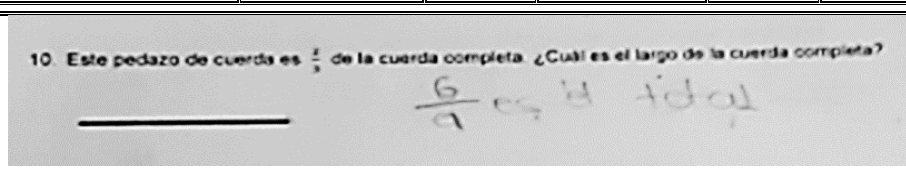
Respecto a la **Comparación de las fracciones**, se encontró dificultades en el 62% de los estudiantes para el ordenamiento de las fracciones, debido al intento del estudiante de adaptar la idea tan intuitiva de siguiente que sucedía con éxito en los números naturales y que ya no es funcional en los números racionales. Entonces ante la Pregunta 12: Se tienen dos tortas de igual tamaño. Si David comió un cuarto de una, y Juan comió un octavo de la otra. ¿Quién comió mayor cantidad de torta?. Los estudiantes contestaron que Juan, la mayoría sin justificar. El ***Registro 5*** presenta el proceso y una de las respuestas que dieron los estudiantes a la pregunta anterior y aunque la mayoría contesto directamente que Juan, este estudiante realiza es una comparación entre los numeradores, igualmente errónea, pero que corrobora el problema del conteo.

***Registro 5**. Ejemplo de comparación entre fracciones*

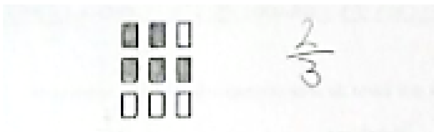
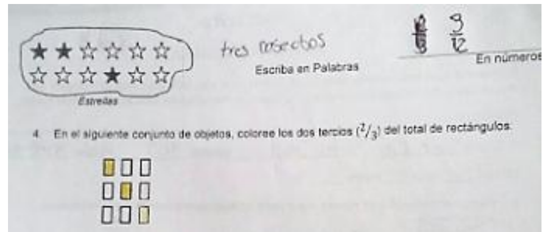
3.6.3. Aspectos de Representación. Los sistemas de representación que utilizaron los estudiantes en la prueba diagnóstico fueron analizados desde dos procesos: habilidad para realizar conversiones de un registro a otro y tratamiento de las representaciones en un mismo registro para resolver situaciones problema. La Tabla 4 presenta el porcentaje de resultados correctos que obtuvieron los estudiantes en relación a los indicadores.

***Tabla 4** Porcentaje de estudiantes que alcanzaron los indicadores de representación*

Indicador	**Contexto discreto**	% **N=24**	**Contexto continuo área**	**% N=24**	**Contexto continuo lineales**	**% N=24**
Conversión de registro gráfico a numérico	Pregunta 3 Pregunta 5	58% 50%	Pregunta 1	33%	Pregunta 6	33%
Conversión de registro numérico a gráfico	Pregunta 4	30%	Preguntas 2, pregunta 11	50% 33%	Pregunta7 Pregunta 8	38% 4%
Tratamiento de las representaciones en un mismo registro para resolver situaciones problema			Pregunta 12 Pregunta 13	38% 33%	Pregunta 9 Pregunta 10	4% 16%

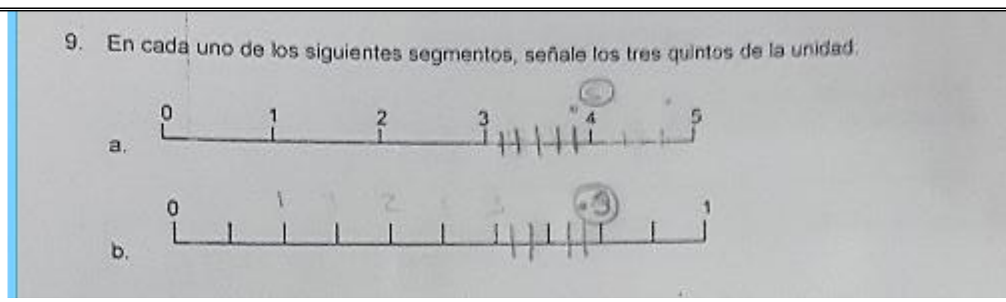


Respecto a los Contextos discretos, Se aprecia una habilidad en un 54% promedio de los estudiantes para representar las fracciones de un registro gráfico a numérico atribuida a la facilidad del conteo, puesto que sólo un 30% logran interpretar correctamente situaciones de registro numérico a gráfico. El Registro 6 ilustra algunas interpretaciones que hacen los estudiantes al respecto:

<table>
<tr><td>Conversion de numérico a gráfico
En el siguiente conjunto de objetos, colorear 2/3 del total de rectángulos.</td><td>Conversion de registro gráfico a numérico
Teniendo como unidad todas las estrellas, exprese que parte de la unidad corresponde a las estrellas sombreadas.</td></tr>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
</table>

Registro 6 *Ilustra algunas conversiones que hacen los estudiantes de registro numérico a gráfico*

En relación con los contextos continuos. los procesos de representación se presentan de forma contraria a los contextos discretos, es decir, se aprecia una familiarización de los estudiantes para representar mediante gráficos fracciones dadas en registros numéricos, especialmente en rectángulos, sin embargo, este proceso de representación no está garantizando que el estudiante comprenda el tipo de unidad que está utilizando, ni de la magnitud sobre la que está realizando la comparación, sólo muestra que aprendió a manipular algunos registros. Esta afirmación se corrobora cuando el estudiante presenta confusiones para representar gráficamente las fracciones en otros contextos como ubicar en la recta numérica o tomar una fracción de un conjunto de objetos. El Registro 7 presenta una evidencia de lo descrito anteriormente.



Registro 7. *Ejemplo de interpretación de las fracciones en la recta numérica*.

Finalmente se puede afirmar que la mayoría de los estudiantes (70%) reconocen algunos registros semióticos, pero estos registros están dando cuenta de que sus ideas respecto a la fracción están ligadas a los procesos de partir y contar, lo cual no les permite lograr una relación entre ellos, ni de utilizarlos como medios para resolver una situación problema.

3.7. Elementos para tener en cuenta para el diseño de la secuencia de actividades

El análisis de los resultados de la prueba diagnóstico permitió identificar algunos elementos para orientar el diseño de las actividades:

- La medición como herramienta fundamental para el reconocimiento de la fracción como número.
- Manejo de unidades (simples o compuestas) y tipos de magnitud (continuas o discretas)
- Uso de diferentes sistemas de representación verbal, gráfico y numérico y procesos de conversión y tratamiento entre ellos.

3.8. Fase de acción. Planeación del trabajo de campo

El trabajo de campo se desarrolló mediante la implementación de una secuencia de actividades estructurada desde el significado de fracción como medida. En base a las dificultades encontradas en la fase diagnóstico y las destrezas que implica el trabajo con fracciones, se planteó como situación inicial una casa de ventas de lotes (magnitud continua) contexto en el que se desarrolló la mayoría de las sesiones, posteriormente se propuso otros contextos como un juego de tiras de lana (magnitud de longitud) y agrupaciones con monedas (magnitud discreta). Cada estudiante contó con materiales concretos necesarios para el desarrollo de la experiencia y las intervenciones mantuvieron la misma metodología: indicaciones generales del profesor, trabajo personal, trabajo grupal y procesos de socialización.

A continuación, en la

Tabla 5 , se presenta los objetivos propuestos para el desarrollo de la secuencia de actividades y la descripción de la actividad.

Tabla 5 *Objetivos propuestos para el desarrollo de la secuencia de actividades y la descripción de la actividad.*

SESIÓN	OBJETIVO	DESCRIPCIÓN
Uno	Representar mediante fracciones unitarias la medida de las magnitudes dadas.	Cada estudiante recibe 4 rectángulos A, B, C, D de tamaño diferente en cartulina y una unidad de medida que es un rectángulo de color, al que se le llamó lote modelo. Tomando el rectángulo de color como unidad de medida el estudiante debe expresar la medida de la superficie de los rectángulos dados. Ver Anexo 3. Tiempo: Una sesión de 60 minutos y una socialización de 15 minutos.
Dos	Establecer fracciones de la forma $\frac{a}{b}$ como la repetición aditiva de unitarias es decir a veces $\frac{1}{b}$.	Con base a la actividad anterior cada estudiante encontró la medida de otras magnitudes propuestas conformadas por la unión de lotes de la misma medida, por ejemplo, determinan la medida de una magnitud formada por 3 lotes A, 5 lotes D y otras. Ver Anexo 4 Tiempo: El tiempo estipulado para esta intervención fue de una sesión de clase de 60 minutos y 15 minutos de socialización.
Tres	Reconocer fracciones equivalentes mediante procesos de medida donde relaciona cuantitativa las unidades de medida entre ellas, reconociendo que la cantidad de superficie que representan en las magnitudes es la misma.	Se propone a los estudiantes determinar la medida de una superficie formada por dos lotes de diferente medida, inicialmente múltiplos entre ellos. Es decir que un lote cubre un número entero de veces al otro. Así el estudiante debía comparar y crear equivalencias entre las situaciones presentadas. Ver Anexo 5 Tiempo: El tiempo estipulado para esta intervención fue de una sesión de clase de 60 minutos cada una.
Cuatro	Reconstruir unidades de medida patrón que faciliten la medición de magnitudes no necesariamente múltiplos entre ellas.	Se propone a los estudiantes determinar la medida de la superficie de lotes formados por dos lotes de diferente medida, no múltiplos entre ellos. De tal manera que el estudiante se ve en la obligación de crear otra unidad de medida que cubra un número exacto de veces a las magnitudes propuestas. Ver Anexo 6 Tiempo: El tiempo estipulado para esta intervención es de dos sesiones de clase de 60 minutos.
Cinco	Representar mediante fracciones medidas	A cada estudiante se le entregaron tiras de lana de diferente color y una tira especial que se empleara como

	realizadas con magnitudes de longitud.	la lana modelo. Mediante el desarrollo de varias preguntas que siguen una secuencia muy parecida a lo realizado con el trabajo de los lotes se observa las habilidades de los estudiantes para dar solución a las situaciones propuestas. Ver Anexo 7 Tiempo: El tiempo estipulado para esta intervención es de dos sesiones de clase de 60 minutos cada una.
Seis	Representar mediante fracciones medidas realizadas con magnitudes discretas.	A cada estudiante se le entregó un grupo de 24 fichas de plástico en forma de monedas que no les permitiera romper ni doblar y una guía de trabajo que orientaba la tarea que debían desarrollar. Ver Anexo 8 El tiempo estipulado para esta intervención es de una sesión de clase de 60 minutos.
Siete	Prueba final	A cada estudiante se le entrega un cuestionario de 7 preguntas abiertas que buscan medir el alcance de los objetivos trazados en las sesiones de la intervención. Ver Anexo 9 El tiempo estipulado para esta intervención es de una sesión de clase de 60 minutos.

3.9. Técnicas e instrumentos para la recolección de datos

Los artefactos que se emplearon para el registro de información de cada una de las intervenciones fueron diarios de campo y diarios del profesor. Los cuales fueron usados para recolectar la información que se originó de los participantes y posteriormente estudiarlos de acuerdo con las categorías de análisis.

- **Talleres:** Actividades presentadas a los estudiantes en cada una de las sesiones de intervención donde se registró la información dada.
- **Diarios del profesor:** se compone de las acciones escritas ante los acontecimientos que ocurren en las sesiones, reacciones personales, problemas destacados, ideas nuevas, descripción de opiniones y formas de solución, etc.
- **Prueba final.** Determina el nivel de logro alcanzado después de la intervención. Ver Anexo 9.

3.10. Categorías de análisis

La unidad de análisis para la presente investigación es la concepción de las fracciones como medida, entendiendo la noción de concepción como aquellos significados parciales que emergen de las respuestas (escritas, verbales, gestuales, etc.) de los estudiantes ante enfrentarse con actividades particulares que responden a una determinada caracterización, descripción o definición de un concepto, en este caso, el de Fracción.

Con base en las ideas de Duval (1999) respecto a objeto-signo y las de Rico (2007) con la terna Estructura Conceptual-Representaciones-Fenómenos como aspectos indispensables para dar significado a un concepto, se adecuó la planificación y evaluación de la secuencia de actividades desde tres componentes: la estructura conceptual, los sistemas de representación, y el contexto.

- La estructura conceptual, comprende la red de conceptos, definiciones, propiedades, notaciones y destrezas relacionadas con la fracción como medida.
- Los sistemas de representación, definidos por los conjuntos de signos, gráficos y reglas que hacen presente el concepto.
- Contexto, incluyen aquellos modos de uso, situaciones y problemas donde se consolida el concepto y lo dotan de carácter funcional.

En atención a lo anterior, para el análisis de los datos recolectados en los diarios de campo se tuvo en cuenta las siguientes categorías:

Categoría uno: **Descripción de la estructura conceptual** Para ello se analizaron los aspectos conceptuales y procedimentales relacionados al concepto de fracción como medida.

Subcategoría uno: Aspectos conceptuales. Atendiendo a los niveles de conocimiento que propone el autor Rico (1995) en los aspectos conceptuales se tuvo en cuenta los hechos y los conceptos:

Hechos: unidades de información previa que se necesita para la enseñanza y el aprendizaje de las Fracciones, términos del lenguaje verbal que usan los estudiantes como medios, tercios, cuartos, etc., y notaciones previas que tienen de la escritura de fracción.

Conceptos: regularidad o relación entre conceptos como fracciones unitarias, fracciones impropias y fracciones equivalentes.

Subcategoría dos: Aspectos procedimentales: Rico (1995) los define como las formas de actuación o ejecución de las tareas. En este caso se atendió a:

Destrezas: que se refiere al procesamiento de hechos y manipulaciones de los símbolos. Por ejemplo, el estudiante logra establecer una subunidad que esté contenida un número entero de veces en la cantidad a medir.

Razonamiento*s*: El estudiante realiza deducciones a partir de la manipulación concreta que realiza.

Estrategias: Situaciones que se adaptan para abordar los conceptos y relaciones. Por ejemplo, los procesos o técnicas de medición que uso el estudiante para resolver la situación planteada.

En la siguiente Tabla 6 , se presenta la estructura conceptual como la relación entre aspectos conceptuales y procedimentales a los que se hizo seguimiento durante la implementación.

Tabla 6 *Elementos para analizar en la categoría conceptual.*

Categoría uno: Estructura conceptual	
Subcategoría uno: NIVEL	**Subcategoría dos: NIVEL PROCEDIMENTAL**

CONCEPTUAL	
Términos: medios, cuartos, octavos…	**Destrezas** ➢ Reconoce y reconstruye la unidad. ➢ Realiza subdivisiones equivalentes. ➢ Identifica fracciones mayores que la unidad. ➢ Establece subunidades para encontrar la medida de una unidad medible. ➢ Utiliza una unidad patrón de medida según la magnitud.
Notaciones: $\frac{a}{b}$, a partes de b,a veces $\frac{1}{b}$…	
Convenios: reconocer las magnitudes como medibles, no superponer, una unidad se puede subdividir, uso de unidad según la magnitud…	
Conceptos: Fracciones unitarias Fracciones equivalentes. Fracciones impropias	**Razonamiento**: Deducción: A partir de la observación y manipulación de las situaciones crea conjeturas.
Fracciones como medida	**Estrategias:** Utiliza la medida directa, repartos y particiones, uso de cuadriculas, comparaciones.

Categoría dos: Sistemas de representación. El análisis se determinó a partir del uso de los diferentes registros, las actividades de conversión y tratamiento entre las representaciones usadas.

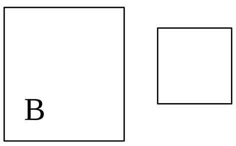
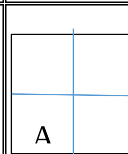
Subcategoría uno: Registros semióticos: Se hace seguimiento al manejo que hace el estudiante de los diferentes sistemas de representación como el verbal, el numérico, el gráfico, el manipulativo, los registros semióticos que utiliza y la conversión entre ellos.

Subcategoría dos: Relación entre los sistemas de representación. Se analiza la habilidad del estudiante para expresar la solución de las situaciones propuestas a partir de la conversión y el tratamiento de los diferentes sistemas de representación.

A continuación, en la

Tabla **7**, mostramos un ejemplo de conversión entre los diferentes registros semióticos actividad que permite identificar la comprensión de los estudiantes respecto a la Fracción como medida y destacar características importantes y particulares del concepto.

Tabla 7. *Ejemplo de conversiones de registros*

Relaciones entre Sistemas de Representación						
Manipulativo		**Gráfico**		**Verbal**		**Simbólico**
	Traducción		Traducción		Traducción	
La superficie A ¿Cuánto es de la superficie B? 				Este contenido cuatro veces es un cuarto		$^{1}/_{4}$

Categoría tres: Contextos Describe la pertinencia de los contextos en la construcción del concepto de fracción como medida y en la implementación de la secuencia.

Subcategoría uno: Contextos relacionados con el concepto de fracción Hace referencia a la incidencia que tienen los contextos de magnitudes continuas como la longitud, área y magnitudes discretas, en los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de fracción.

Subcategoría dos: Contextos relacionados a la implementación Describe la pertinencia del uso de material manipulativo y aspectos que se originaron novedosos en el momento de aplicar la actividad, las preguntas y situaciones que se presentaron no planeadas.

En la

Tabla ***8*** se presenta la relación entre los conceptos y contextos a los que se realizó seguimiento durante la implementación.

Tabla 8*. Relación de conceptos y contextos*

Conceptos	**Contextos relacionados con el concepto**	**Contextos relacionados con la implementación**

<table>
<tr><td rowspan="2">Fracciones unitarias
Fracciones $\frac{m}{n}$
Fracciones impropias
Fracciones equivalentes</td><td>Magnitudes Continuas</td><td>Rectángulos de papel
Tiras de lana.</td><td rowspan="2">Trabajo individual
Trabajo grupal
Socialización.</td></tr>
<tr><td>Magnitudes discretas</td><td>Monedas</td></tr>
</table>

4. Resultados y hallazgos

4.1. Resultados de la implementación de la secuencia de actividades por sesión.

El contexto general en el que se desarrolló la mayor parte de la secuencia de actividades fue basado en una situación real, donde se ubicó a los estudiantes como vendedores en una casa de lotes, cuyo papel principal era determinar la medida de los lotes dados en relación con un lote modelo. Cada estudiante contó con unas fichas rectangulares de colores que representaban los lotes y un rectángulo de color blanco que era el lote modelo, tomado como la unidad de medida.

A continuación, se presenta una descripción de los resultados obtenidos en cada una de las sesiones de intervención analizados a partir de las categorías de análisis. Para la evaluación de estos resultados se establecieron unos indicadores que permitieran medir el alcance del objetivo propuesto en cada una de las sesiones, de tal manera, que al resolver cada una de las tareas, se determina si los estudiantes logran el indicador de manera total, parcial o nula, según los errores en los que incurren.

4.2. Primera sesión - Lotes y lotes

La actividad (ver Anexo 3) permitió a los estudiantes iniciar un proceso de **conceptualización de las fracciones unitarias** (es decir, aquellas con numerador uno y cuyo denominador es un entero positivo), centrando la reflexión en procesos de medición, mediante el recubrimiento y conteo de magnitudes, logran realizar relaciones de "n veces…" y "n- ésima parte de…" como dos relaciones inversas que se pueden utilizar la una para definir la otra. Es decir, que en vez de conceptualizar la fracción $\frac{1}{n}$ como "una parte sombreada de las n en que se dividió la unidad", se comprende como "la cantidad de magnitud que cubre n veces la unidad de medida, es decir es la n-esima parte de esta".

En la Tabla 9, se presenta el objetivo de la sesión, los indicadores por cada categoría de análisis y el porcentaje de estudiantes que alcanzaron el indicador de manera total, parcial o nula.

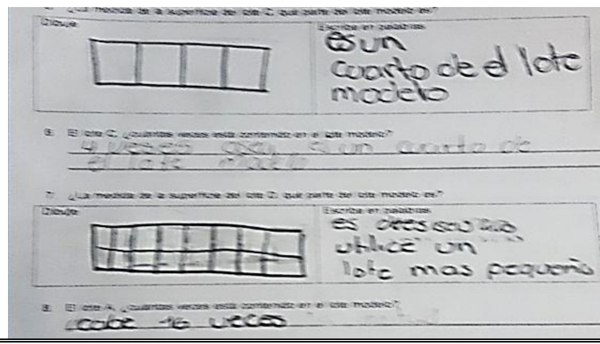
Tabla 9. *Objetivo de la actividad uno y sus indicadores*

Sesión uno	Objetivo: Representar mediante fracciones unitarias la medida de las magnitudes dadas.			
Categorías	**Conceptual**	**Procedimental**	**Representación**	
Indicador	Utiliza términos como medios, tercios, cuartos…. para representar la relación de cuantificación de una magnitud con otra.	Realiza una relación de n veces y 1/n como la cantidad de veces que está contenida en la cantidad tomada como unidad de medida.	Utiliza sistemas de representación verbal, gráfico y numérico para expresar el objeto medible.	Uso adecuado de notación simbólica de fracciones unitarias.
Logro Total	55%	51%	40%	40%
Logro Parcial	30%	44%	44% solo dos sistemas verbales, gráfico	10%
Nulo	15%	5%	16%	50%

A nivel conceptual y procedimental se puede apreciar que el uso de términos como medios, tercios, cuartos, etc., son expresiones construidas por los estudiantes con anterioridad ya sea a nivel académico o de la cotidianidad y son una ventaja para el desarrollo de las actividades de medida, puesto que esta idea intuitiva de la fracción, facilitó que los estudiantes tomando como referencia una unidad de medida más grande que la magnitud a medir, lograran hacer una relación inversa entre cuanto es de la cantidad total y cuántas veces recubre esa cantidad de magnitud, haciendo uso de fracciones unitaria para comunicar sus resultados.

El

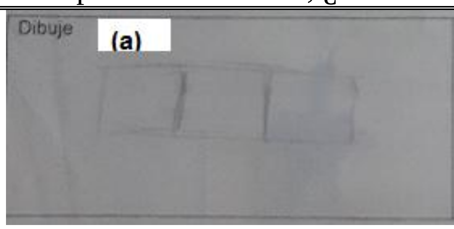
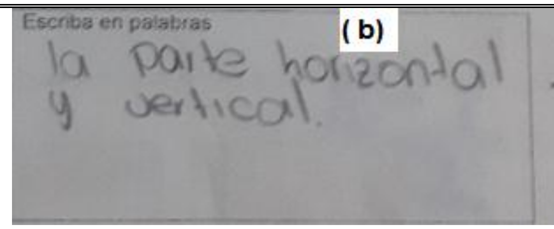
Registro 8 presenta un ejemplo de esas construcciones, donde se ilustra la relación que hace un estudiante entre un cuarto y 4 veces para determinar la medida del rectángulo pedido. Aunque sus trazos no son de manera precisa representa el cubrimiento de la magnitud total en unidades iguales, de manera que establece que el rectángulo C es $\frac{1}{4}$ de la unidad de medida puesto que cabe 4 veces en ella. De igual manera reconoce en forma natural que un cuarto es mayor que un diez y seisavo.

La superficie del lote C ¿Cuánto es de la superficie del lote modelo?


***Registro 8**. Ejemplo del uso de fracciones unitarias*

Por otro lado, se identificó que los estudiantes que presentaron dificultad para resolver la actividad se debieron, a la poca relación cotidiana con los términos (medio, tercios, cuartos…) y al no reconocimiento de la magnitud como cualidad medible. Por ejemplo: Al preguntarles: la superficie de lote B, ¿Cuánto es de la superficie del lote modelo?

Sus respuestas fueron es "La parte vertical". "La parte de arriba", "la de la izquierda" …. El Registro 9 ilustra algunas de sus respuestas.

<table>
<tr><td colspan="2">La superficie del lote B, ¿Cuánto es de la superficie del lote modelo?</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Registro 9. Dificultad de un estudiante para asumir la relación inversa 1/n y n veces

Respecto al uso de registros de representación, en esta primera sesión, se consideraron las representaciones espontaneas utilizadas por los estudiantes que en su mayoría fueron de forma verbal-gráfica, y aunque algunas expresiones no estuvieran escritas con precisión como: un dieciséis, una mitad, una tercera, 1 de 3 veces, a medida que fueron trabajando y específicamente en las socializaciones se mostraba la necesidad de simplificar estas expresiones a notaciones más precisas y hasta simbólicas, sin ninguna intención de incorpóralas de inmediato.

Durante los procesos de socialización, fue necesario que el profesor resaltara el reconocimiento de la magnitud como una cualidad medible y aclarar que el recubrimiento no puede tener espacios ni estar yuxtapuesto.

4.3. Segunda sesión-Suma de lotes unitarios.

Los estudiantes construyen el significado de las fracciones de la forma $\frac{m}{n}$ como una relación cuantitativa establecida a partir de la medición y, fundamentalmente, sobre procesos aditivos y multiplicativos que se derivan de la repetición de una fracción unitaria generando así fracciones no unitarias e inclusive impropias. Ver Anexo 4.

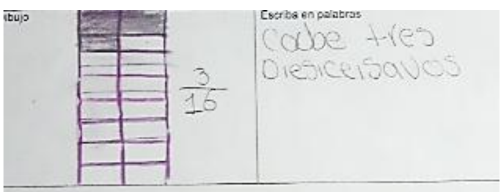
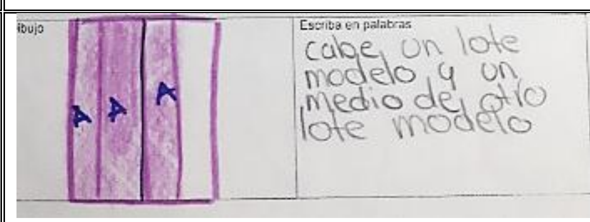
En la Tabla 10 se presenta, el objetivo que se esperaba alcanzar durante la sesión y el porcentaje de estudiantes que alcanzaron el indicador de manera total, parcial o nula.

***Tabla 10**. Objetivo e indicadores de la sesión dos*

Sesión dos	Objetivo: Establecer fracciones de la forma $\frac{m}{n}$ como la repetición aditiva de unitarias es decir m veces $\frac{1}{n}$.			
	Conceptual	**Procedimental**	**Representación**	
Indicador	Reconoce la fracción unitaria	Identifica la fracción $\frac{m}{n}$ como m veces la fracción unitaria $\frac{1}{n}$	Realiza conversiones entre diferentes sistemas de representación, grafico. Verbal. o Numérico	Utiliza la notación simbólica para representar fracciones impropias.
Logro Total	74%	74%	18%	8%
Logro Parcial	21%	21%	82% entre dos sistemas verbal- gráfico	70%
Logro Nulo	5%	5%		12%

Al analizar los resultados presentados, se observa una familiarización en el 74% de los estudiantes con las fracciones unitarias, sin embargo, vale aclarar que al iniciar cada sesión se recapitula los alcances de la sesión anterior con el fin de organizar el trabajo y lo aprendido anteriormente.

El identificar fracciones de la forma $\frac{m}{n}$ como la suma de m unitarias de $\frac{1}{n}$ se desarrolló en los estudiantes de forma natural; mediante el conteo de fracciones unitarias encontraron la medida de la magnitud que se les presentó. Ahora bien, la mayoría de los estudiantes utilizaron registros verbales y gráficos para expresar sus respuestas, sólo un 18% uso registros numéricos para indicar sus respuestas. Los registros gráficos presentan algunas dificultades en cuanto a la proporción de sus medidas; sin embargo, en la socialización se enfatizó en lo inapropiado de las gráficas incompletas o parciales y se les motivó a los estudiantes a graficar de manera más precisa. El Registro 10 presenta algo al respecto.

Tres veces la superficie del lote D. ¿Cuánto es de la superficie del lote modelo?	Tres veces la superficie del lote A. ¿Cuánto es de la superficie del lote modelo?
	

***Registro 10**. Ejemplo de fracciones $\frac{a}{b}$ como a veces $\frac{1}{b}$*

El estudiante utiliza un registro numérico para la primera situación, pero ante la pregunta 2: “Tres veces la superficie del lote A ¿Cuánto es de la superficie del lote modelo?” cuya respuesta representaba la fracción impropia $\frac{3}{2}$. Se observó que los estudiantes sólo representaron de manera gráfica y verbal la solución. Esta situación, aunque no preocupa, se presentó en un 82% de los estudiantes, indicando que el uso de registros numéricos en la fracción es un proceso más lento. Lo interesante aquí es reconocer como el trabajo de las fracciones desde la medida permite dar sentido y significado a uno de los conceptos más complejos como es el de fracciones impropias;

pues implícitamente para interpretar y dar solución a la situación, los estudiantes hacen un reconocimiento y una reconstrucción de la unidad, que durante la prueba diagnóstico no demostraban.

En general, este reconocimiento de la fracción $\frac{m}{n}$ como una suma reiterada de $\frac{1}{n}$ permite incorporar la fracción desde una perspectiva diferente a la tradicional y trae consigo más significado y menos dificultades para los estudiantes, es un trabajo más lento para alcanzar la representación simbólica, pues el sistema de representación numérico se ha presentado de manera muy paulatina y ha sido más un trabajo de socialización que construcción propia de los estudiantes (Tratamiento que hay que hacer con cuidado).

No obstante, al logro anterior, durante la sesión se presentó dificultad para el desarrollo del ítem 3 cuyo enunciado era: "La superficie de los lotes A y B juntos ¿cuánto es de la superficie del lote modelo?"

La pregunta era un verdadero problema para los estudiantes puesto que ya no se pedía la medida reiterada de un mismo lote, sino que la superficie de los rectángulos A y B unidos no cubrían un número exacto de veces en la superficie modelo y entre ellas tampoco existía una relación de cubrimiento entera.

Esta dificultad que se tenía previsto desde el diseño de la secuencia para tratar como sesión tres, llevo a replantear una actividad emergente anterior a está, que surgió en el aula como mecanismo de ayuda para la solución de la misma.

4.4. Sesión tres: Actividad emergente.

Al ver que los estudiantes no lograban hacer una relación entre las magnitudes dadas.

Inicialmente se recordó la medida de los lotes: A ($\frac{1}{2}$ del lote modelo), B ($\frac{1}{3}$ del lote modelo), C $\left(\frac{1}{4}\text{ del lote modelo}\right)$ y D $\left(\frac{1}{16}\text{ del lote modelo}\right)$ y luego se les propuso hallar la medida de la superficie de los siguientes lotes en relación con el lote modelo. Ver Anexo 5.

Orientados mediante las siguientes preguntas:

- La superficie de los lotes A $\left(\frac{1}{2}\right)$ y C $\left(\frac{1}{4}\right)$ juntos ¿cuánto es de la superficie del lote modelo?
- La superficie de los lotes A $\left(\frac{1}{2}\right)$ y D $\left(\frac{1}{16}\right)$ juntos ¿cuánto es de la superficie del lote modelo?
- La superficie de los lotes C $\left(\frac{1}{4}\right)$ y D $\left(\frac{1}{16}\right)$ juntos ¿cuánto es de la superficie del lote modelo?

Esta actividad al ser magnitudes cuya medida es múltiplo entre ellas, permitió que los estudiantes identificaran fracciones equivalentes basadas en la medida. Mediante procesos de recubrimiento y comparación entre magnitudes, lograron determinar una unidad patrón que cubriera a otra un número exacto de veces para luego expresar la medida de la superficie que representaban juntas.

La ***Tabla 11*** presenta los resultados obtenidos indicando el porcentaje de estudiantes que alcanzaron los indicadores propuestos tanto conceptuales, procedimentales como de representación.

Tabla 11. *Objetivo e indicadores de la sesión tres.*

Actividad emergente	Objetivo: Reconocer fracciones equivalentes mediante procesos de medida donde relaciona cuantitativa las unidades de medida entre ellas, reconociendo que la cantidad de superficie que representan en las magnitudes es la misma.			
	Conceptual	**Procedimental**		**Representación**
Indicador	Utiliza	Establece	Establece	Representa la relación

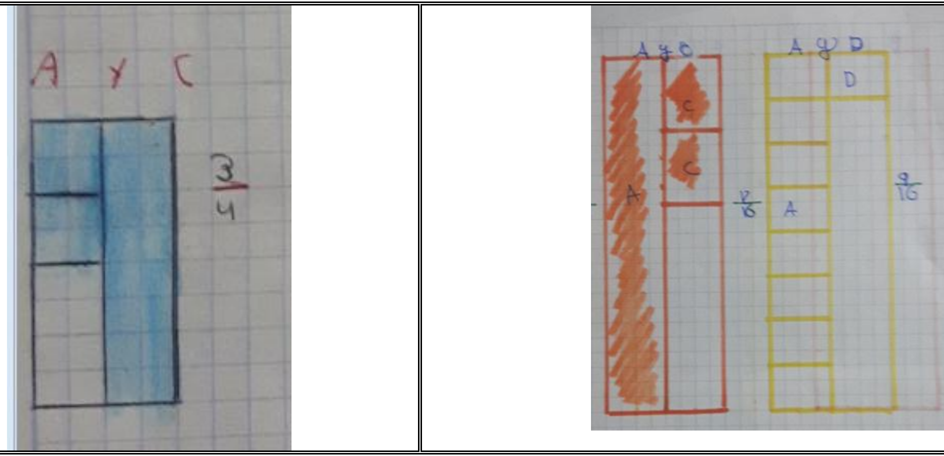
	Fracciones de la forma m/n	unidades de medida patrón entre dos magnitudes.	subdivisiones equivalentes	cuantitativa entre magnitudes cuya medida es múltiplo una de la otra usando registros gráficos, verbales y/o numéricos.
Logro total	65%	54%	65%	22%
Logro parcial	16%	16%	22%	65%
Logro nulo	19%	30%	13%	13%

El 65% de los estudiantes utilizan la fracción de la forma $\frac{m}{n}$ no sólo de forma verbal como la suma de unitarias $\frac{1}{n}$ sino además con su representación numérica, proceso que hasta el momento había sido muy lento. Al parecer la actividad, por todo el proceso que exige, el estudiante ve la representación numérica como una necesidad para expresar y simplificar todo un proceso de comparación y de conversión entre los sistemas de manipulación y gráfico.

El reconocer que el rectángulo A de medida $\frac{1}{2}$ se recubre con 2 (B) de $\frac{1}{4}$ y que juntos medirían $\frac{3}{4}$, no es un proceso fácil, pero desde la perspectiva de la medida y con ayuda del material manipulativo se logró en un 54% de los estudiantes.

Por otro lado, se evidencia que el trabajo de las fracciones como medida, no conlleva, a que los estudiantes cometan errores como confundir numerador y denominador, los procesos de 3 de $\frac{1}{5}$ tiene sentido para los estudiantes por lo tanto se interiorizan fácilmente. La construcción de fracciones equivalentes aparece como una herramienta para crear unidades patrón entre las magnitudes dadas sin ningún proceso aritmético de por medio, sino sólo bajo la idea de cuantificación y medida.

Un ejemplo, de algunas de las construcciones se evidencia en el Registro 11 donde los estudiantes presentan gráficamente el proceso usado, hacen uso de la notación fraccionaria y exponen una respuesta correcta al planteamiento.



Registro 11. Ejemplo de construcción de unidades equivalentes.

Los estudiantes que lograron desarrollar la actividad de manera parcial (16%); una de las razones fue por tiempo, pero realizaron al menos una de las construcciones y el 30% que corresponde aproximadamente a 7 estudiantes clasificados en alcance nulo, se debe al no trabajo en clase y/o inasistencia en las sesiones anteriores.

4.5. Cuarta sesión- Construyendo nuevos lotes.

La actividad (ver Anexo 6) se inició recordando a los estudiantes, que el ítem 3 de la segunda sesión no fue solucionado y motivándoles a responderlo, se les pidió retomar la pregunta:

"La superficie de los lotes A $\left(\frac{1}{2}\right)$ y B $\left(\frac{1}{3}\right)$ juntos ¿cuánto es de la superficie del lote modelo?"

Además, se les sugirió la solución de otras dos preguntas:

- La superficie de los lotes B y C juntos ¿cuánto es de la superficie del lote modelo?
- ¿Será posible crear un nuevo lote cuya magnitud permita medir cualquiera de los lotes?

La Tabla 12 presenta los resultados obtenidos según las producciones de los estudiantes en relación con el alcance del indicador y la categoría.

Tabla 12 *Objetivo e indicadores de la sesión cuatro*

Sesión cuatro	Objetivo: Reconstruir unidades de medida patrón que faciliten la medición de magnitudes no necesariamente múltiplos entre ellas.		
	Conceptual	**Procedimental**	**Representación**
	Uso de Fracciones unitarias	Identifica la unidad de medida común entre dos o más magnitudes medibles y establece subdivisiones equivalentes	Representa en diferentes registros la medida de la unidad patrón y su relación cuantitativa con las otras magnitudes.
Logro total	70%	63%	29%
Logro parcial	20%	16%	57%
Logro nulo	10%	21%	14%

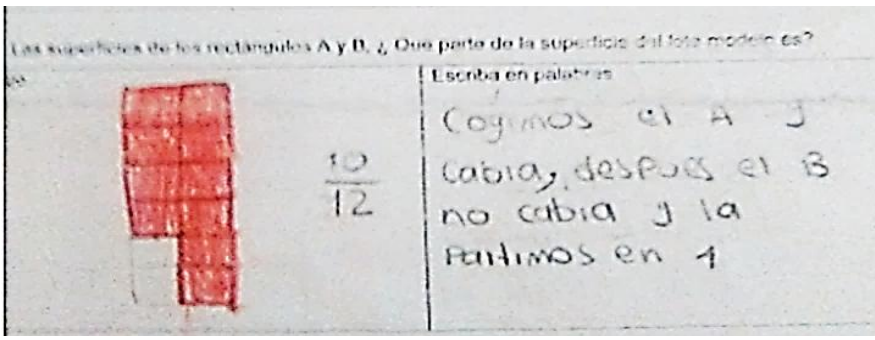
Los resultados de la tabla anterior, indica que un 70% de los estudiantes muestra un manejo adecuado de las fracciones unitarias, 63% desarrollo habilidad para determinar si el recubrimiento de las magnitudes dadas se puede hacer de manera exacta o era necesario la construcción de otra unidad patrón, por ejemplo el estudiante reconoce que entre la magnitud $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{16}$ se puede hacer un recubrimiento exacto entre ellas mientras que en la magnitud $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{16}$ requiere la construcción de una unidad patrón. No obstante, aun sus construcciones son muy concretas y dependientes del sistema de representación manipulativo.

Para los estudiantes encontrar una unidad patrón entre los rectángulos A $\left(\frac{1}{2}\right)$ y B $\left(\frac{1}{3}\right)$ no fue sencillo, les llevo varias particiones y recubrimientos. Dentro de sus procesos se encontró:

- Partición del lote B $\left(\frac{1}{3}\right)$ en dos partes y observando que éste cubría tres veces exactas el lote A $\left(\frac{1}{2}\right)$, deducen que serían seis veces en el lote modelo, de ahí que representara $\frac{1}{6}$ luego A y B juntas representarían $\frac{5}{6}$

- Partición del lote B $\left(\frac{1}{3}\right)$ en cuatro partes y observando que este cabía seis veces exactas en el lote A $\left(\frac{1}{2}\right)$, por lo tanto 12 veces en el lote modelo, representando $\frac{1}{12}$, luego A y B juntas representarían $\frac{10}{12}$.
- Procesos similares se encontraron para construir la unidad patrón entre los rectángulos B y C.

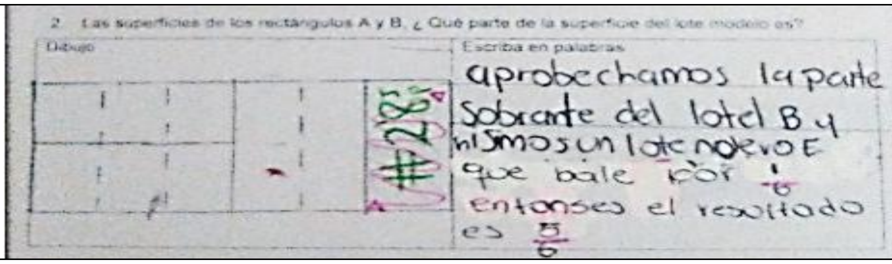
El registro 12 ilustra una de las construcciones realizadas por un estudiante.



Registro 12*. Ejemplo de construcción de una unidad de medida equivalente a magnitudes no múltiplos entre ellas*

Es de resaltar que sólo el 4% de los estudiantes (1 estudiante), logra construir una unidad común para los rectángulos B $\left(\frac{1}{3}\right)$ y D $\left(\frac{1}{16}\right)$ y ninguno encontró una unidad patrón para los diferentes rectángulos (A, B, C y D). Dificultad que se genera por las particiones que los estudiantes usan, pues estos fraccionan en mitades, tercios o cuartos particiones que son insuficientes para otras construcciones. Por otro lado, la manipulación del material concreto es una estrategia inicial que facilita la solución, pero que, en este momento, requiere de una formalización para que no se quede sólo en este proceso que es muy concreto.

Respecto a los procesos de representación, en esta sesión, el 29% de los estudiantes utilizan diferentes registros para representar las fracciones entre ellos el simbólico, el 57% clasificado como logro parcial hacen uso de diferentes registros, pero sus procesos de representación son dependientes aun de la manipulación del material. Es decir, todavía no identifican una regularidad entre las medidas sino la construyen materialmente. En el Registro 13 se presenta algunas construcciones.



Registro 13. *Ejemplo de construcción de unidades equivalentes a dos magnitudes dadas.*

En general, la actividad permitió que los estudiantes mediante estrategias de partición, uso de cuadriculas, dobleces y recubrimientos lograran identificar unidades de medida patrón para determinar la medida de dos o más magnitudes (no múltiplo uno de otra).

Es de resaltar que el trabajo grupal cumple un papel importante, porque es allí donde los estudiantes logran consolidar las técnicas para encontrar unidades patrón y es en el proceso de socialización donde se acepta y se evidencia que un conjunto en el que se ha definido una relación de equivalencia puede ser dividido en varios subconjuntos de elementos equivalentes.

Cabe aclarar que, durante la actividad, a los estudiantes se les sugirió hacer particiones o dobleces de las magnitudes dadas ya que este proceso, quizás por la particularidad del contexto de lotes no les parecía posible. Replanteamiento para tener en cuenta al ajuste de la propuesta.

En las sesiones cinco y seis se buscaba observar que tanto los procesos adquiridos en las sesiones anteriores permiten a los estudiantes desarrollar actividades en otros contextos como los de magnitudes de longitud y magnitudes discretas.

4.6. Quinta sesión- Cuerdas.

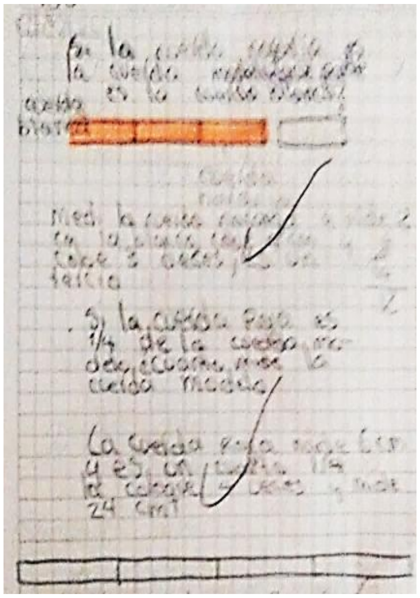
Los estudiantes identifican y expresan la fracción en diferentes sistemas de representación en un contexto de magnitudes de longitud. Ver Anexo 7

La Tabla 13, presenta los resultados obtenidos durante la actividad, donde se codificaron el uso de conceptos relacionados, las destrezas y los sistemas de representación que utilizaron.

Sesión cinco	Magnitudes de longitud	Objetivo: Reconocer habilidades del estudiante respecto a las fracciones al realizar medidas en magnitudes de longitud		
	Conceptual	**Procedimental**	**Representación**	
	Fracciones unitarias	Reconstruir la unidad a partir de los datos dados.	Conversión de un sistema de representación a otro para interpretar la situación dada.	Transformación de una situación dentro del mismo registro.
Logro total	75%	45%	33%	30%
Logro parcial	10%	40%	61%	55%
Logro nulo	15%	15%	6%	15%

Tabla 13. Objetivo e indicadores de la sesión cinco

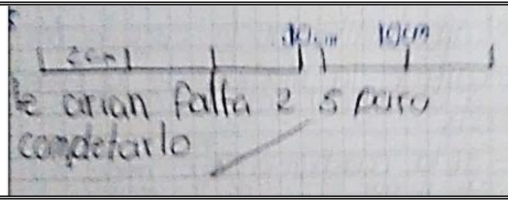
Observando la tabla, se evidencia que no se encontró una diferencia significativa en la comprensión de los estudiantes cuando trabajan con magnitudes de longitud en relación al trabajo con magnitudes de área, hubo un reconocimiento de fracciones unitarias fácilmente, por otro lado, los estudiantes reconstruyen la unidad utilizando como estrategia el significado de la fracción como medida, o sea justifican sus resultados a partir de las cantidades de magnitud. Un ejemplo se presenta en el Registro 14. Ejemplo de reconstrucción de la unidad desde el significado de medida.

	Transcripción Si la cuerda naranja es la cuerda modelo ¿Cuánto mide la cuerda blanca en relación con la cuerda modelo? Medí la cuerda naranja y mide 12 cm la blanca mide 4 cm cabe 3 veces y es un tercio. Si la cuerda roja es $\frac{1}{4}$ de la cuerda modelo ¿Cuánto mide la cuerda modelo? La cuerda roja mide 6 cm y es un cuarto la coloque 4 veces y mide 24 cm.

Registro 14. *Ejemplo de reconstrucción de la unidad desde el significado de medida.*

De otra parte, las actividades de esta sesión permitieron a un 45% de los estudiantes desarrollar otra habilidad relativa a las fracciones como lo es la *reconstrucción de la unidad* (si $\frac{m}{n}$ *es una parte de la unidad entonces* $\frac{n}{n}$ *es la unidad total*), fundamentada en reconocer la parte faltante para completar la unidad o reconocer que la parte dada es mayor a la unidad.

Respecto a los procesos de representación en este contexto de longitud, se evidencio que la mayoría de los estudiantes hace un manejo de los diferentes registros semióticos para representar las fracciones, sin embargo, sólo un 30% de los estudiantes logran resolver situaciones donde se da numéricamente una parte de la magnitud y a partir de las condiciones, deben determinar la cantidad total de la magnitud. Por ejemplo, se les pregunto “si la cuerda roja mide 6 cm y es $\frac{3}{5}$ de la cuerda modelo ¿Cuál es la medida de la cuerda modelo? En el Registro 15 se muestra este hallazgo.



Registro 15. *Ejemplo del uso de representación gráfica para resolver situaciones problema.*

El estudiante reconstruye la unidad gráficamente y verbalmente reconoce que le faltan $\frac{2}{5}$ aun cuando hace uso incorrecto de la notación), sin embargo, no le es posible determinar la medida numérica de la cuerda completa. De ahí que la actividad del tratamiento de una representación en un mismo registro requiera de un trabajo más específico.

4.7. Sexta sesión: Agrupando Monedas.

A cada estudiante se le entrego un grupo de 18 fichas en forma de moneda y se les indicó que antes de empezar la actividad era necesario hacer un reconocimiento de esta nueva magnitud y sus posibles unidades de medida, se les ordenó hacer diferentes agrupaciones que mantuvieran la misma cantidad de monedas. Luego, mediante una socialización, los estudiantes reconocen que se trabajara con una colección de objetos, que se puede enumerar y contar, de tal manera que se pueden hacer diferentes subgrupos sin que pierda su magnitud, por ejemplo 9 grupos de a dos monedas, 6 grupos de tres monedas y otros ejemplos similares facilitaron el reconocimiento de la colección de monedas como una magnitud medible.

El objetivo general de esta sesión era lograr que los estudiantes establecieran fracciones unitarias en contextos discretos, fundamentadas en acciones como la realización de conversiones entre los diferentes sistemas de representación.

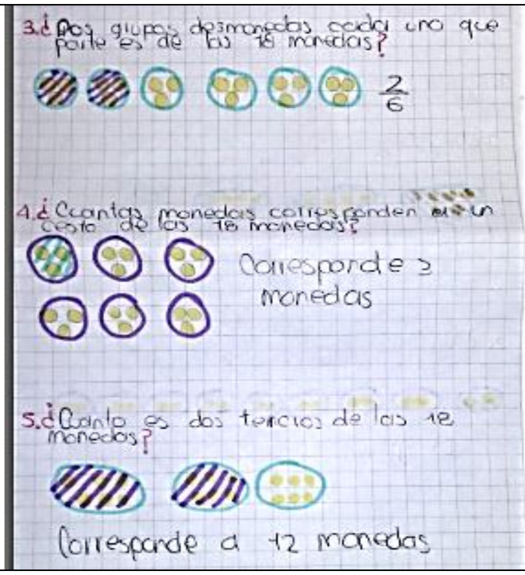
Los resultados encontrados se encuentran tabulados en la tabla 14 que se analizara con detenimiento.

***Tabla 14**. Objetivo e indicadores de la sesión seis*

Sesión seis	Objetivo: Representar mediante fracciones unitarias medidas realizadas con magnitudes discretas.			
	Conceptual	**Procedimental**	**Representación**	
	Uso de divisores	Determina una relación cuantitativa entre las unidades compuestas y la colección total.	Realiza conversiones entre diferentes registros de representación.	Transforma un sistema de representación dentro del mismo registro.
Logro total	63%	33%	80%	60%
Logro parcial	21%	51%	4%	24%
Logro nulo	16%	16%	16%	16%

La primera actividad consistía en realizar los diferentes subconjuntos de igual cantidad que se podían organizar con las 18 monedas. De los cuales el 63% de los estudiantes lo logra totalmente, el 21% de forma parcial alcanza con éxito la creación de los seis posibles subgrupos, y el 16% clasificado como logro nulo, realizaron una o dos agrupaciones y con dificultad lograron establecer otras, una dificultad asociada al reconocimiento de divisores del número y manejo de tablas de multiplicar.

Procedimentalmente se buscó que los estudiantes lograran establecer la medida de un subgrupo en relación al grupo total, de tal manera que hicieran uso de las fracciones unitarias para indicar la medida. Donde encontramos que un 33% de los estudiantes logra no confundir la cantidad del subconjunto con la parte que representa, el porcentaje de 51% presentado como logro parcial se debe a estudiantes que representan mediante fracciones unitarias la medida de cada subconjunto en relación al conjunto total, sin embargo al pedirle que determinaran cuántos elementos tiene $\frac{2}{3}$ del conjunto mostraba confusiones como decir 2, las respuestas señaladas como logro nulo se debió a la dificultad que presentaba el estudiante para organizar los diferentes subgrupos y al tenerlos todos parece que la representación visual de las diferentes formas de organizar 18 generó mucho más confusiones. El Registro 16. Ejemplo de construcción en magnitudes discretas. **Registro 16** presenta algunas evidencias de sus procesos.

	¿Cuántas monedas son 2/3 de las 18 monedas? 

Registro 16*. Ejemplo de construcción en magnitudes discretas.*

Respecto al proceso de representación se observó que para resolver con éxito las preguntas propuestas los estudiantes en su mayoría (80%) recurría al uso de las fichas y a la representación gráfica. Lo que evidencia que la habilidad para tratar una situación en un mismo registro es un proceso aun no alcanzado.

En acuerdo con Obando (2003) el tratamiento de las unidades compuestas es un proceso más complejo que las unidades simples, y como lo asegura en su investigación es necesario primero conceptualizar las unidades simples y, posteriormente, conceptualizar unidades compuestas, puesto que se requiere de más trabajo para que los estudiantes, entiendan que una multitud de objetos también puede ser una unidad.

4.8. Prueba final

A través de una prueba escrita se identificó el nivel de aprendizaje adquirido por los estudiantes después de la intervención. La prueba contiene siete ítems, cada uno está relacionado con los objetivos de las sesiones de intervención. (Ver Anexo 9).

4.8.1. Comparación entre prueba diagnóstico. La prueba final y las tareas de intervención

Para identificar el nivel de avance de los estudiantes se realizó una comparación entre los resultados de la prueba final, la prueba diagnóstica y el alcance de los objetivos en cada una de las sesiones. Con el fin de ver la incidencia que presentó la intervención en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

La tabla 15 presenta esta comparación de resultados, donde el porcentaje asignado corresponde al número de estudiantes que respondieron la pregunta adecuadamente y alcanzaron el logro en su totalidad.

Sesión	Objetivo	Pregunta Prueba final	% Respuesta. Correcta	Pregunta Prueba diagnóstico	% Respuesta correcta	Indicador procedimental x sesión
Uno	Representar mediante fracciones unitarias la medida de las magnitudes dadas.	1	65%	1	33%	51%
Dos	Establecer fracciones de la forma $\frac{m}{n}$ como la repetición aditiva de unitarias es decir m veces $\frac{1}{n}$.	2	91%	1	33%	74%

Tres	Reconocer fracciones equivalentes mediante procesos de medida donde relaciona cuantitativa las unidades de medida entre ellas.	6 (ordenamiento)	34%	12 (ordenamiento)	38%	54%
		7 (equivalencia)	56%	13 (equivalencia)	33%	54%
Cuatro	Reconstruir unidades de medida patrón que faciliten la medición de magnitudes no múltiplos entre ellas.	5	34%	10	25%	63%
Cinco	Representa mediante fracciones medidas realizadas con magnitudes de longitud.	4	82%	6	11%	45%
Seis	Representar mediante fracciones medidas realizadas con magnitudes discretas.	3ª	65%	3	54%	33%
		3B	21%	4	49%	51%
				5	50%	

Tabla 15 *Comparación de resultados entre prueba final-prueba diagnóstico y alcance de indicador procedimental en cada sesión*

Para observar de una manera más general los avances encontrados. Se representa la información anterior mediante la siguiente gráfica de barras, donde se tomaron promedios para los objetivos que presentaban más de una pregunta.

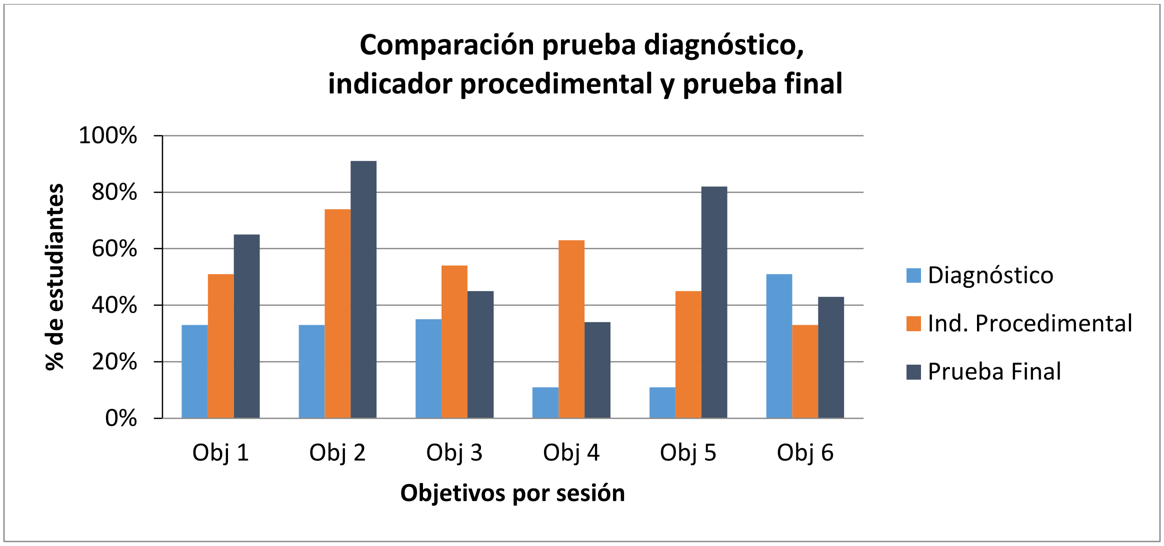


Diagrama 1. *Avance de los estudiantes desde la prueba diagnostico a prueba final*

Como se observa en el

Diagrama 1, es positivo el crecimiento de las habilidades de los estudiantes con respecto a su diagnóstico. La mayor diferencia de resultados se presentó en el objetivo 4 que corresponde a encontrar la medida de una superficie teniendo como referencia una unidad no múltiplo de esta, donde el alcance procedimental durante la intervención fue del 63% de los estudiantes significativamente alto con respecto a la prueba final que sólo lo alcanzaron el 34% de los estudiantes. Esta diferencia de resultados se debe a que la pregunta, durante la prueba final, requería más tiempo del que se propuso y los estudiantes no contaron con ningún material concreto que les ayudara a representar dicha situación. Por otra parte, es de resaltar el logro de los objetivos 2 y 5, donde se evidencia el paso natural que están dando los estudiantes de un contexto continuo de área a un contexto continuo de longitud. Respecto al objetivo 3, que presenta un porcentaje de alcance no muy acelerado, está relacionado con el proceso de medir donde se evidencia que para los estudiantes encontrar una unidad de medida nueva que permita comparar las dos magnitudes dadas, es una tarea que requiere de unas exigencias cognitivas que se van desarrollando paulatinamente.

4.9. Análisis de los resultados de la prueba final en relación a las categorías.

Para hacer un estudio más detallado de los avances que presentaron los estudiantes después de la intervención, se realizó un análisis de los resultados de la prueba final en relación a las categorías conceptual, procedimental y de representación comparados con los resultados de la prueba diagnóstico.

Hallazgos a nivel conceptuales. En la Tabla 16, se presenta el alcance del indicador a partir de la contribución de cada respuesta.

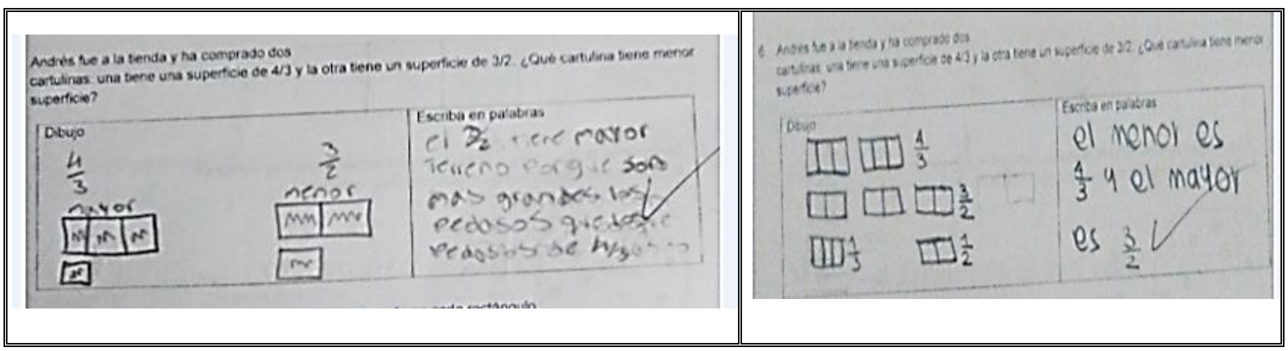
Indicador	**Contexto discreto**		**Contexto continuo área**		**Contexto continuo lineales**	
Prueba	**Diag**	**Final**	**Diag**	**Final**	**Diag**	**Final**
Uso adecuado de la notación fraccionaria.	54%	22% Preg 3	33%	69% Preg 1	33%	82% Preg.4
Reconoce Fracciones impropias mayores de la unidad.			30%	34% Preg 6		
Fracciones equivalentes			33%	60% Preg.7		

Tabla 16. Comparación de resultados a nivel conceptual prueba final y prueba diagnóstico

A nivel general, se evidencia un avance significativo en cada uno de los indicadores, especialmente en el trabajo con contextos continuos, donde el uso de representaciones simbólicas que usaron los estudiantes da cuenta de la comprensión y significado que tienen ahora de la fracción. Respecto a magnitudes discretas la diferencia se debe a que en las intervenciones se trabajó una sola sesión, proceso insuficiente para lograr un manejo adecuado de una representación simbólica.

En relación al poco avance que aparenta la tabla de las fracciones impropias se debe, en gran medida, a que la pregunta realizada en la prueba diagnóstico era más de conversión de registros (represente gráficamente $\frac{5}{4}$) mientras que en la prueba final se buscaba un tratamiento de la representación, pues la pregunta aparte del pedir un reconocimiento de fracciones impropias pedía una comparación entre ellas (pregunta 6), por lo tanto, para la investigación no se valora como bajo. ya que los estudiantes (34%) que resolvieron la pregunta de la prueba final demostraron no sólo un reconociendo de la fracción impropia sino una comparación entre cantidades.

Es justamente el desarrollo de la pregunta 6 formulada en la prueba final: “Andrés va a la tienda y compra dos cartulinas una tiene una superficie de $\frac{4}{3}$ y la otra una superficie de $\frac{3}{2}$. ¿Qué cartulina tiene menor superficie?”. La que evidencia que el trabajo de la fracción desde el significado como medida permite que los estudiantes den un sentido a la fracción como número, donde se demuestra la aceptación de forma natural que hacen de las fracciones mayores, menores e iguales que la unidad, como resultado de una acción de medida de una cantidad de magnitud. La siguiente ilustración presenta los procesos realizados por dos estudiantes en relación a esta pregunta.



***Registro 17**. Respuestas de dos estudiantes a la pregunta 6*

El Registro 17 , ilustra como los estudiantes reconocen la fracción impropia, reconstruyen la unidad y hacen comparación entre fracciones teniendo como referencia la cantidad de magnitud.

Se evidencia el uso de representaciones gráficas y numéricas, que aunque sean imprecisas como en el caso dos, le sirven para dar solución al problema propuesto.

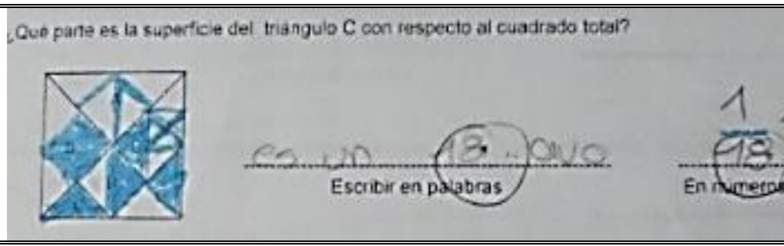
Hallazgos a nivel procedimental. En la **Tabla 17** presenta la comparación entre la prueba diagnóstico y la prueba final en relación con los indicadores procedimentales.

Indicador	**Contexto discreto**		**Contexto continuo Área**		**Contexto continuo lineales**	
	Diag.	**Final**	**Diag.**	**Final**	**Diag.**	**Final**
Reconocimiento de partes iguales.	48%	74% Preg 3	46%	69% Preg 1	35%	74% Preg. 4
Reconstrucción de la unidad					12%	30% Preg. 5
Comparación de las fracciones por su cantidad			38%	34% Preg. 6 y 7.		

Tabla 17 *Comparación de resultados a nivel procedimental prueba final y prueba diagnóstico*

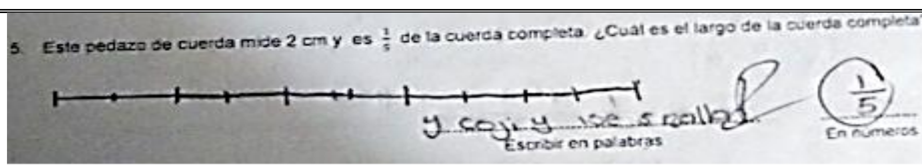
Según, los resultados se puede apreciar que el trabajo desde la fracción como medida ha permitido un avance significativo en las habilidades procedimentalmente relacionadas al concepto, como es el reconocimiento de partes iguales que desde esta perspectiva pasa de ser un atributo a ser un elemento necesario para realizar una medida, pues el mismo proceso de medir una cantidad consiste en determinar las veces que esa cantidad contiene a la cantidad que se toman como referencia, lo que obliga a que sea igual. Así la relación magnitud y unidad son fundamentales en el proceso de medición.

Por otro lado, durante el desarrollo de la prueba final se observaron dificultades procedimentales que vale la pena resaltarlas, como recubrimientos mal realizados, inconvenientes por parte de los estudiantes para encontrar una unidad de medida común entre dos magnitudes dadas, y la dependencia del material concreto para representar las situaciones propuestas. En el **Registro 18** ilustra la dificultad que presento un estudiante al hacer un recubrimiento de la magnitud que no le permitió resolver correctamente la pregunta uno de la prueba final.



Registro 18. *Ejemplo de dificultades presentados por los estudiantes*

Respecto, a las situaciones relacionadas con la reconstrucción de la unidad, se observó que la mayoría de los estudiantes reconoce que n veces 1/n es una unidad completa y que es uno de los primeros procesos que se necesita para trabajar la fracción como medida. Pese a esta habilidad, se presentaron algunas dificultades para resolver situaciones como la pregunta 5: Este pedazo de cuerda mide 2 cm y es $\frac{1}{5}$ de la cuerda completa. ¿Cuál es el largo de la cuerda completa? En el **Registro 19** Registro 19. Ejemplo del uso de representaciones gráficas de un estudiante para resolver una situación problema de reconstrucción.



Registro 19. *Ejemplo del uso de representaciones gráficas de un estudiante para resolver una situación problema de reconstrucción.*

Observando sus procesos, el estudiante tiene claro que con 5 $de\frac{1}{5}$ reconstruye la unidad, y realiza una representación gráfica adecuada de ello, sin embargo, no logra asignarle un número como medida a la magnitud total. Dificultad que le atribuyo a las pocas actividades que tiene la secuencia de actividades en relación con el tratamiento y conversión entre las representaciones y a la distracción que genera la gráfica, para el estudiante, dificultad que también fue identificada en contextos discretos, donde se deja confundir entre cuántos y que parte.

Hallazgos en procesos de representación. El análisis de los resultados que presenta la siguiente tabla se realizó en relación con las actividades de conversión y tratamiento que presentaron los estudiantes entre los diferentes registros semióticos.

Indicador	**Contexto discreto**		**Contexto continuo área**		**Contexto continuo lineales**	
Prueba	**Diagnóstico**	**Final**	**Diag**	**Final**	**Diag**	**Final**
Conversión de registro gráfico a numérico	54%	65% Preg.3	33%	69% Preg.1	33%	73% Preg.4
Conversión de registro numérico a gráfico	30%	26% Preg.3b	57%	91% Preg. 2	21%	26% Preg.5
Tratamiento de una representación en un mismo registro para solucionar una situación.			35%	45% Preg.6	10%	26% Preg.5

Tabla 18 *Comparación de resultados en cuanto al uso de representaciones en la prueba final y prueba diagnóstico.*

Es difícil hacer un análisis de la representación que realiza el estudiante ajeno a la situación propuesta. Por lo tanto, los resultados de esta tabla corresponden al éxito de solución que da a la pregunta la cual puede estar a partir de un gráfico para contestar de forma numérica o viceversa. Por ejemplo, en la prueba final las preguntas 1 de área, 3 de colección y 4 de longitud se presentan de forma gráfica y se pide representar de forma numérica la medida de la parte señalada, donde se observó que más del 65% de los estudiantes contestaron de forma correcta cada una de ellas.

En las preguntas (2 y 3b) que corresponden a conversión de numérico a gráfico se evidencia un avance, particularmente en contextos continuos, la pregunta 2 es prueba del trabajo intenso que se realizó durante la intervención con magnitudes continuas; proceso que quedo incompleto para contextos discretos y que se evidencia en la solución de la pregunta 3b de la prueba, donde la mayoría de estudiantes presento dificultad. Sin embargo, de manera general se puede deducir que la secuencia de actividades permitió, que de forma natural, los estudiantes realizaran conversiones entre diferentes registros de representación para comunicar sus resultados.

En cuanto a la actividad de tratamiento de una representación semiótica en un mismo registro se analizaron las preguntas 5 (contexto de longitud) y 6 (contexto de área) de la prueba final, donde se percibe que el avance fue de sólo 10% algo mínimo con respecto a la que tenían los estudiantes inicialmente. Indicando que la secuencia se encuentra corta de actividades para el desarrollo de este proceso de representación tan importante en la construcción del concepto.

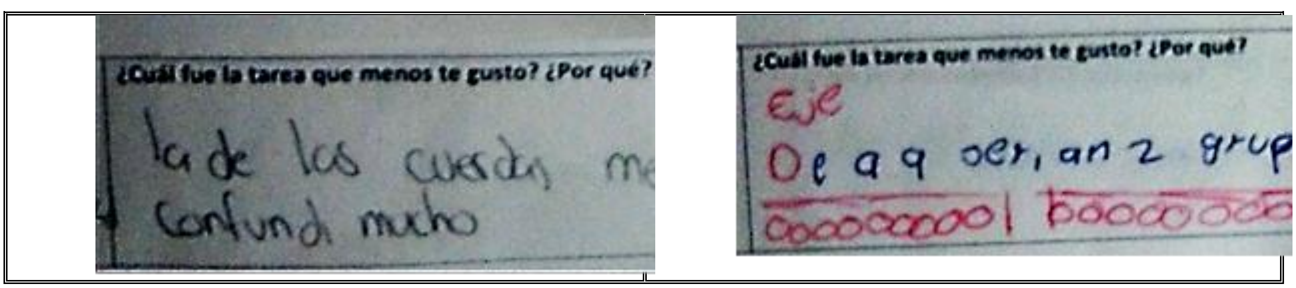
Es el tratamiento el tipo más importante de transformaciones semióticas, en cuanto es sólo a través del tratamiento que se proporciona una explicación o se efectúa una demostración. Duval (2008) citado en D' Amore ((2006, pág. 135).

Hallazgos con respecto a los contextos. En esta categoría se identificaron algunos elementos respecto a los contextos que dan sentido a la investigación. Divididos en dos subcategorías: Contextos relacionados con el concepto y Contextos relacionados a la implementación.

Subcategoría 1. Contextos relacionados al concepto. La pertinencia e influencia de los contextos continuos y los contextos discretos en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las fracciones, fueron analizadas metódicamente en los apartados anteriores debido a la relación directa con los conceptos, procesos y representaciones. No obstante, describiré algunos elementos que pueden ser relevantes al analizar la secuencia de actividades:

- Establecer la fracción como medida en magnitud discreta, requiere de un trabajo más específico y pausado que el trabajo con contextos continuos. Se observó que no es tan fácil para el estudiante aceptar que una colección de objetos es igualmente una unidad, lo corrobora igualmente Fandiño (2009).
- Es necesario evitar introducir contextos discretos hasta que no se haya consolidado la construcción conceptual de la fracción en contextos continuos.
- No se evidencio diferencia entre el trabajo con magnitudes continuas de superficie y magnitudes continuas de longitud. Pero si se observa poca habilidad en los procesos de representación ante situaciones de longitud.

Por otro lado, indagando en los estudiantes acerca del impacto de las actividades, se realizó una encuesta a 10 de los participantes escogidos aleatoriamente y ante la pregunta ¿cuál fue la tarea que menos te gusto? , encontramos que el 50% señala que la actividad de las monedas (contexto discreto), el 30% indicó que la actividad de las lanas (contexto continuo de longitud) y el resto contestó estar conforme con todas. De la intervención, la actividad de las monedas fue la que mayor dificultad presentó, ya que desde el inicio hubo confusión por parte de los estudiantes para manipular las fichas y organizar los subgrupos de elementos iguales. Ver **Registro 20**



Registro 20. *Percepción de los estudiantes con respeto a las actividades*.

Subcategoría 2. Contextos asociados a la implementación de las actividades. Al implementar la secuencia de actividades en torno a la construcción del concepto de fracción como medida a través de un mismo tema como es el de los “lotes" se identificó que los estudiantes se enfrentan a la situación problema con una actitud receptiva, de reto, donde avanzan y desarrollan las tareas propuestas más fácilmente; por lo tanto, se deduce que el trabajo desde un contexto cotidiano para los estudiantes hace que ellos lo vean más factible de solucionar.

En la encuesta realizada a los estudiantes se encontró que la actividad de los lotes fue una de las tareas que más les gusto, entonces ante la pregunta ¿Cuál fue la tarea que más te gusto? ¿Por qué? Se encontraron respuestas como:

- “Cuando tuviste que crear tu propio lote y ver que parte era del modelo”.
- “La de los lotes era como venderlos en realidad”.
- “La de los lotes porque ayuda a desarrollar la mente, pensando”.
- “La de los lotes porque se necesita pensar, dividir y muchas cosas”.

Sin embargo, pese a que hubo una buena acogida de la actividad por parte de los estudiantes es una situación que se debe replantear ya que la fracción como medida exige unos procesos de partición y recubrimiento que inicialmente sólo se puede logra con material concreto y la situación de un lote no sería la más coherente con esa interpretación.

El material de las lanas fue pertinente para la actividad, favoreció la solución de las actividades propuestas, se presentaron algunos inconvenientes con niños que no sabían medir utilizando la regla y esto creo un poco de retraso para las tareas, pero finalmente se alcanzó el objetivo.

Basándonos en la encuesta realizada a los estudiantes, la actividad de las monedas pese a que se desarrolló en su totalidad y fue un material que inicialmente motivo a los estudiantes, no dejó el impacto esperado, debido al cuidado en los procesos que requieren los contextos discretos. Hecho que se puede tener en cuenta al organizar las tareas de la actividad.

De manera general, se puede apreciar que el uso de material concreto es un recurso que para la iniciación del concepto es necesario, sin embargo, se debe tener cuidado que el estudiante cree modelos concretos y vincule su aprendizaje con objetos concretos que no le permitan hacer abstracciones.

5. Conclusiones

Atendiendo a los objetivos propuestos, fuentes teóricas y los resultados evidenciados durante las intervenciones, a continuación, se describen algunos aspectos que llevan a responder la pregunta que orienta esta investigación.

El análisis hecho a los procedimientos de resolución de las actividades, producidas por los estudiantes desde el inicio de la intervención hasta la prueba final, permite afirmar que la secuencia de actividades implementada en este trabajo bajo la estructura del significado de fracción como medida, desarrollo procesos de aprendizaje con mayor sentido y significado del concepto de fracción, pues los estudiantes construyeron e identificaron de forma natural la existencia de fracciones mayores, fracciones menores o iguales que la unidad, aceptándolas como la suma reiterada de fracciones unitarias; así mismo los conceptos de equivalencia, comparación y reconstrucción de la unidad se manifestaron de forma implícita en las tareas de medición como fundamentales para expresar la medida de una cantidad de magnitud en distintas subunidades.

Por otro lado, la secuencia facilitó el uso de diferentes tipos de registros semióticos, por parte de los estudiantes, como una manera intuitiva para comunicar la medida de una cantidad de magnitud, pasando de representaciones manipulativas y gráficas a representaciones simbólicas.

Particularmente, a nivel conceptual la secuencia estructurada desde el significado de medida, invita a recuperar para la enseñanza, el uso de las fracciones unitarias, pues en acuerdo con Behr, M., Lesh, R., Post, T., y Silver E. (1983), los estudiantes logran una noción cuantitativa más fuerte de los números racionales cuando el desarrollo de los conceptos básicos del número racional surge de la iteración de fracciones unitarias. Es así que la fracción $\frac{m}{n}$ vista como la interacción de m veces la unidad de medida $\frac{1}{n}$, le permitió a los estudiantes darle a la fracción un estatus de número diferente a la de número natural, eludiendo dificultades como el doble conteo, el no reconocimiento de partes iguales y las confusiones entre numerador y denominador que tenían en el diagnóstico.

A nivel procedimental, los estudiantes de sexto grado, construyen fracciones equivalentes y suman fracciones utilizando como estrategia los procesos de partición y el significado de fracción como medida, pues justifican sus resultados a partir de las cantidades de magnitud que expresan las fracciones, establecen unidades comunes de medida entre las magnitudes dadas y utilizan la relación inversa n veces y n-esimas veces entre la cantidad de magnitud a medir y la cantidad de magnitud usada como unidad de medida para comparar y reconstruir la unidad total.

De igual manera, la secuencia potenció la construcción social del conocimiento, pues el trabajo grupal y los procesos de socialización fueron fundamentales para formalizar las representaciones y las estrategias de resolución usadas. Además, promovió el desarrollo autónomo de los estudiantes, motivándolos para que ellos mismos construyeran su propio conocimiento, a partir de las experiencias cotidianas y del uso del material concreto. Es de resaltar que el papel de la representación manipulativa facilitó la adquisición de los conceptos a medida que la comprensión pasa de concreto a abstracto.

Recomendaciones

- La secuencia requiere ser complementada con actividades de medición en magnitudes de longitud, magnitudes discretas y la trasformación de representaciones semióticas en un mismo registro.

- Se deja como sugerencia un cambio en el contexto de la actividad de los lotes, que aunque fue una situación agradable para los estudiantes, no es la más propicia para la necesidad de partición que se requiere desde la perspectiva de la fracción como medida.
- La secuencia de actividades mostró debilidad para el trabajo de las fracciones con magnitudes discretas. Cuyo proceso de aceptación por parte de los estudiantes fue lento y no tan inmediato como con magnitudes continuas; no es tan fácil que los estudiantes acepten un conjunto de elementos como una unidad de medida, es posible que estos contextos requieran de algo más que ver la fracción como medida, es pues un camino abierto para otras investigaciones.

Personalmente abordar el tema de las fracciones desde el significado de medida fue todo un reto, pues, era cambiar la perspectiva que venía trabajando en mi práctica docente para el trabajo con las fracciones, sin embargo, después de haber realizado este trabajo que concluye con la elaboración de este escrito, puedo corroborar que es una buena alternativa de trabajo para la enseñanza de la fracción, que permite un aprendizaje más significativo para los estudiantes. Además, la enseñanza de la fracción desde el significado de medida es una alternativa de trabajo diferente al tradicional, que nutre el significado de fracción, y propende una ruta efectiva hacia la construcción de la idea de número racional.

Referencias bibliográficas

Behr, M. H. (1993). *Rational numbers toward a semantic analysis —emphasis on the operator construct. En T. Carpenter, E. Fennema y T. Romberg (Eds.).* Hillsdale, NJ: Erlbaum.: Rational numbers: an integration of research (pp. 13-47).

Behr, M., Lesh, R., Post, T, & Silver, E. (1983). Conceptos de números racionales. *En R. Lesh & M. Landau (Eds.), Adquisición de Conceptos y Procesos de Matemáticas*, 91-125. Nueva York: Academic Press.

Castaño, A. N. (2014). *Dificultades en la enseñanza de las operaciones con números racionales.* Manizales: Tesis de Maestria en enseñanza de las ciencias. Universidad Autonoma de Manizales.

Chamorro, M. C. (1995). *"Aproximación a la medida de magnitudes en la Enseñanza.* Graó, Barcelona: Revista Uno, N ° 3.

D'amore, B. ((2006). "Objetos, significados y representaciones semióticas y sentido. *Revista Latinoamericana de investigación Matemática Educativa*, (pp. 177-195.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano.* Colombia: Editorial Universidad.

Elliott, J. (2005). *La investigación acción en educación.* Madrid, España: Morata.

Escolano, R., & Gairin, J. (Marzo de 2005). Gairin, E. y. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del nuemro racional. *Revista iberoamericana de educacion matematica UNION*(1), 17 - 35.

Fandiño, M. (2009). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos.* Bogotá: Editorial Magisterio.

Freudenthal, H. (1994). *fenomenologia Didactica de las estructuras matemáticas.* Mexico D.F: CINVESTAV-IPN.

Gairin, J. M. (2001). Unaa interpretacion de las fracciones Egipcias desde el recto del Papiro Rhind. *ILUIL, vol 24*, 649-684.

Gallardo, J., Gonzalez, J., & Quispe, W. (2010). ¿Qué comprensión de la fracción fomentan los libros de texto peruanos de matemáticas? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*(11(3)), 111-131. .

García, R. y. (1997). *Dificultades en la comprensión del numero fraccionario; La Relación Parte Todo. Trabajo de grado especialización en educación.* Bogotá: Universidad Distrital Francisco.

Godino, J. D., Batanero, C., & Roa, R. (2003). Medida y su didáctica para maestros. En G. Juan, *Didactica de las matematicas para maestros.* (págs. 355-381). Universidad de Granada. ISBN:84-932510-2-X: Departamento de Didáctica de las Matemáticas.

Kieren, T. (1980). *"The rational number constructs. Its elements and mechanisms.* Columbus, OH, ERIC/SMEAC,: Recent Research on Number Learning.

León, G. (2011). *unidad Didactica: Fracciones.* España: Universidad de Granada.

Llinares. (2003). Fracciones, decimales y razon. En M. d. Chamorro, *Didactica de las matematicas para primaria* (págs. 183-219). Madrid: Pearson.

Llinares, S., & Sanchez, V. (1997). *Fracciones.* Madrid. España.: Sintesis.

MEN, M. d. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En M. d. Nacional, *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas* (págs. 46 - 95). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Obando, G. (2003). La enseñanza de los numeros racionales a partir de la relacion parte-todo. *Revista Ema*, 157-182.

Perera Dzul, P. B., & Valdemoros Álvarez, M. E. (Abril de 2009). Enseñanza experimental de las fracciones en cuarto grado. *21*(1), 29-61.

Rico Luis, L. L. (2007). *Matematicas escolares y analisis de contenido con profesores de Secundaria en formación .* España: Universidad de Granada.

Rico, L. (1995). Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas. *EMA, Vol. 1, Nº 1*, 4-24.

Rico, L., & Castro, E. y. (2006). *Sistemas de representación y aprendizaje de.* España: Departamento didactica de la Matemática.

Streefland, L. (1993). Las fracciones: un enfoque realista. *In rational Numbers: An Integration of Research*.

Anexos

Anexo 1. Consentimiento Informado

Bogotá D.C. Enero 30 de 2017

Señores padres de familia:

Cordial saludo, para el Colegio Policarpa Salavarrieta, es importante mejorar las competencias en todas las áreas que tienen nuestros estudiantes. Dentro del trabajo que se desarrolla en el área de matemáticas, se busca mejorar cada día en las habilidades dentro del área, para este fin, quiere desarrollarse en el aula de grado sexto, una innovación de aula como parte integral en la formación que la docente de matemáticas está teniendo en la Maestría en Educación con énfasis en lecto-escritura y matemáticas en la Universidad Externado de Colombia. Para realizar esta innovación se tomaran algunos datos a los estudiantes, se realizan algunas entrevistas y grabaciones de audio y video para las actividades que se realicen dentro de la clase.

Los datos serán tomados con carácter investigativo y son confidenciales para la investigación. La participación del estudiante no tendrá ninguna contribución económica.

Atentamente,

NATALIA RICO MARTINEZ

Docente de área de Matemáticas.

Autoriza

SORAYA FLOREZ ALVAREZ

Rectora

Yo____ acudiente del estudiante____ curso 601, SI ( ) o NO ( ) doy el consentimiento para que mi hijo/a participe en la innovación que se va desarrollar en la clase de matemáticas como parte del proyecto de investigación de la Maestría en Educación.

____

CC.

Firma del Padre de Familia o Acudiente

Anexo 2. Prueba diagnóstica

Universidad Externado de Colombia

FRACCIONES

PRUEBA DIAGNÓSTICA

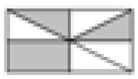
El presente cuestionario forma parte de un estudio en el área de la Educación Matemática. Las respuestas suministradas por ustedes constituyen un valioso aporte para el éxito de este trabajo.

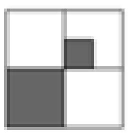
COLEGIO: ____

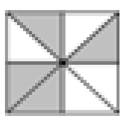
NOMBRE: ______________________ GRADO: ________ FECHA: ________

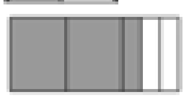
EDAD: _____ Años ____ Meses _____

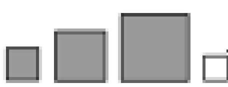
1. Escriba en palabras y en número a que parte de área corresponde la región sombreada:

a.  ____________________ Escriba en Palabras ____________ En números

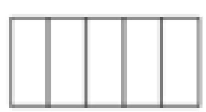
b.  ____________________ Escriba en Palabras ____________ En números

c.  ____________________ Escriba en Palabras ____________ En números

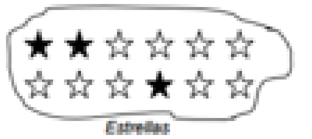
d.  ____________________ Escriba en Palabras ____________ En números

e.  ____________________ Escriba en Palabras ____________ En números

2. En los siguientes rectángulos, coloree la superficie que se indica:
   a. Un cuarto de rectángulo
   b. Un sexto de rectángulo

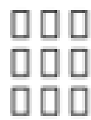


3. Tomando la unidad todas las estrellas, exprese qué parte de la unidad corresponden las estrellas sombreadas:

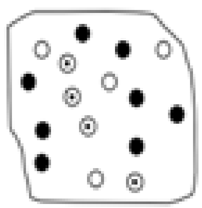


Escriba en Palabras __________________ En números ____

4. En el siguiente conjunto de objetos, coloree los dos tercios $\left(\frac{2}{3}\right)$ del total de rectángulos:



5. En el siguiente conjunto de canicas ¿Qué parte corresponde a cada color?



En negro: Escriba en Palabras __________________ En números

En punteado: Escriba en Palabras __________________ En números

En blanco: Escriba en Palabras __________________ En números

6. En los siguientes segmentos escriba en palabras y en números la parte que corresponde a la longitud coloreada.

a.  __________________ ____________
Escriba en Palabras En números

b.  __________________ ____________
Escriba en Palabras En números

7. Dado el siguiente segmento señale con color la cuarta parte de su longitud:

8. Dado el siguiente segmento señale con color la sexta parte de su longitud

9. En cada uno de los siguientes segmentos, señale los tres quintos de la unidad

a.

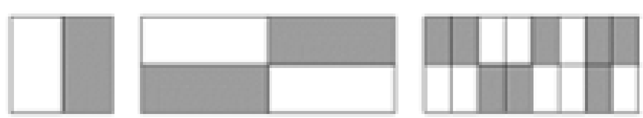
b.

10. Este pedazo de cuerda es $\frac{2}{3}$ de la cuerda completa. ¿Cuál es el largo de la cuerda completa?

11. Represente gráficamente la fracción $\frac{3}{4}$

12. Se tienen dos tortas de igual tamaño. Si David comió un cuarto de una, y Juan comió un octavo de la otra, ¿Quién comió mayor cantidad de torta? Justificar su respuesta

13. ¿Se puede afirmar que la parte sombreada en cada rectángulo es la misma? Justifique su respuesta



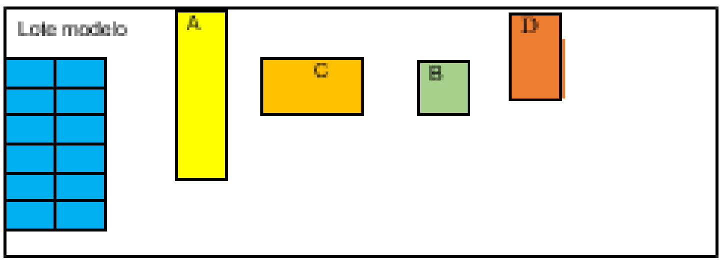
Anexo 3. Actividad uno. Lotes y lotes

COLEGIO POLICARPA SALAVARRIETA
AREA DE MATEMATICAS- GRADO SEXTO

Nombre ____

ACTIVIDAD UNO. LOTES Y LOTES

En una casa de proyectos de vivienda ofrecen al público diferentes tamaños de lotes A, B. C. y D.



Utilice el material entregado y determine el tamaño de cada uno de los apartamentos tomando como referencia el apartamento modelo.

Conteste las preguntas, justificando sus procesos dibujando y escribiendo:

1. ¿La medida de la superficie del lote A, cuánto es del lote modelo es?

Dibuje	Escriba en palabras

2. El lote A, ¿cuántas veces está contenido en el lote modelo?

____

____

3. ¿La medida de superficie del lote B, cuánto es del lote modelo es?

Dibuje	Escriba en palabras

4. El lote B, ¿cuántas veces está contenido en el lote modelo?

____

____

COLEGIO POLICARPA SALAVARRIETA
AREA DE MATEMATICAS- GRADO SEXTO

5. ¿La medida de la superficie del lote C, cuánto es del lote modelo?

Dibuje	Escriba en palabras

6. El lote C, ¿cuántas veces está contenido en el lote modelo?

____

____

7. ¿La medida de la superficie del lote D, cuánto es del lote modelo?

Dibuje	Escriba en palabras

8. El lote D, ¿cuántas veces está contenido en el lote modelo?

____

____

9. Utilice una expresión para nombrar la superficie de cada uno de los lotes en relación con la superficie del lote modelo.

Lote A

Lote B

Lote C

Lote D

Anexo 4. Actividad dos. Reconstruyendo lotes

COLEGIO POLICARPA SALAVARRIETA
AREA DE MATEMATICAS- GRADO SEXTO

Nombre ____

ACTIVIDAD DOS- RECONSTRUYENDO LOTES

Utilice las fichas entregadas y conteste las siguientes preguntas, dibuje y escriba

1. Tres veces la superficie del lote D ¿Cuánto es de la superficie del lote modelo?

Dibujo	Escriba en palabras

2. Cinco veces la superficie del lote D ¿cuánto es de la superficie del lote modelo?

Dibujo	Escriba en palabras

3. Nueve veces la superficie del lote D ¿cuánto es de la superficie del lote modelo?

Dibujo	Escriba en palabras

COLEGIO POLICARPA SALAVARRIETA
AREA DE MATEMATICAS- GRADO SEXTO

3. Construya un nuevo lote que sirva como unidad de medida para cada uno de los lotes y determine su medida con respecto al lote modelo. ¿Será posible crear un nuevo lote cuya magnitud permita medir cualquiera de los lotes?

Dibujo	Escriba en palabras	Expresión numérica

Anexo 5. Sesión tres. Actividad emergente

COLEGIO POLICARPA SALAVARRIETA
AREA DE MATEMATICAS- GRADO SEXTO

Nombre ____

ACTIVIDAD EMERGENTE

Encuentre entre cada par de lotes un nuevo lote que sea unidad de medida de cada uno de ellos y determine la medida de su superficie con respecto al lote modelo.

1. La superficie de los rectángulos A y C juntos ¿cuánto es de la superficie del lote modelo?

2. La superficie de los rectángulos C y D juntos ¿cuánto es de la superficie del lote modelo?

3. La superficie de los rectángulos A y D juntos ¿cuánto es de la superficie del lote modelo?

Anexo 6. Sesión cuatro. Nuevos Lotes

COLEGIO POLICARPA SALAVARRIETA
AREA DE MATEMATICAS- GRADO SEXTO

Nombre_________________________________

Actividad Cuatro: NUEVOS LOTES

Encuentre entre cada par de lotes un nuevo lote que sea unidad de medida de cada uno de ellos y determine la medida de su superficie con respecto al lote modelo

1. La superficie de los rectángulos A (1/2) y B (1/3) ¿cuánto es de la superficie del lote modelo?

Dibujo	Escriba en palabras como lo encontró	Expresión numérica

2. La superficie de los rectángulos B y C ¿cuánto es de la superficie del lote modelo?

Dibujo	Escriba en palabras	Expresión numérica

Anexo 7. Sesión cinco. Cuerdas

COLEGIO POLICARPA SALAVARRIETA
AREA DE MATEMATICAS- GRADO SEXTO

Nombre ____

ACTIVIDAD CINCO- CUERDAS

En la bolsa entregada va encontrar 4 cuerdas de diferente color. Utilice el material entregado para resolver la actividad

1. La cuerda rosada es un medio de la cuerda modelo. ¿Cuánto mide la cuerda modelo?
2. Si la cuerda Azul es 2/3 de la cuerda modelo. ¿cuánto mide la cuerda modelo?
3. Si la cuerda roja es ¼ de la cuerda modelo. ¿Cuánto mide la cuerda modelo?
4. Si la cuerda naranja es la cuerda modelo. ¿Qué parte es la cuerda blanca en relación a la cuerda modelo?
5. Si la cuerda roja mide 3/5 de la medida de la cuerda modelo. ¿cuál es la medida de la cuerda modelo?

Anexo 8. Actividad Seis. Agrupando monedas

COLEGIO POLICARPA SALAVARRIETA
AREA DE MATEMATICAS- GRADO SEXTO

NOMBRE____

ACTIVIDAD SEIS- AGRUPANDO MONEDAS

Con el grupo de las 18 monedas realice:

Realice todos los posibles arreglos de monedas de tal manera que en cada subgrupo quede la misma cantidad de monedas. Por ejemplo: 6 grupos de a 3 monedas cada uno.

A partir de los arreglos que realizo con las 18 monedas. Conteste las siguientes preguntas.

1. ¿Un gr upo de seis monedas que parte es?
2. ¿un grupo de 2 monedas que parte es de las 18 monedas?
3. ¿Dos grupos de 3 monedas cada una que parte de las 18 monedas es?
4. ¿Cuántas monedas corresponden a 1/6 de las 18 monedas?
5. ¿Cuánto es 2/3 de las 18 monedas?

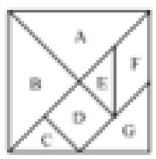
Anexo 9. Prueba Final

COLEGIO POLICARPA SALAVARRIETA
GRADO SEXTO- PRUEBA FINAL

NOMBRE **CURSO** **FECHA**

El presente cuestionario forma parte de un estudio en el área de la Educación Matemática. Las respuestas suministradas por ustedes constituyen un valioso aporte para el éxito de este trabajo

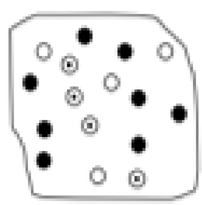
1. ¿Qué parte es la superficie del triángulo C con respecto al cuadrado total?



.... Escribir en palabras .... En números

2. Si una persona compra 2/3 de la superficie de un terreno. Indique en el rectángulo dado que parte compraría.

3. En el siguiente conjunto de canicas ¿Qué parte corresponde a cada color?



En negro: .... Escribir en palabras .... En números

En punteado: .... Escribir en palabras .... En números

En blanco: .... Escribir en palabras .... En números

4. En los siguientes segmentos escriba en palabras y en números la parte que corresponde a la longitud coloreada

a.  .... Escriba en palabras .... En número

b.  .... Escriba en palabras .... En número

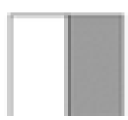
5. Este pedazo de cuerda mide 2 cm y es $\frac{1}{5}$ de la cuerda completa. ¿Cuál es el largo de la cuerda completa?

Escribir en palabras En números

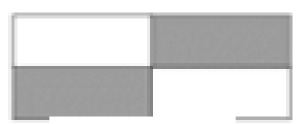
6. Andrés fue a la tienda y ha comprado dos cartulinas: una tiene una superficie de 4/3 y la otra tiene un superficie de 3/2. ¿Qué cartulina tiene menor superficie? Justificar

Dibujo	Escriba en palabras

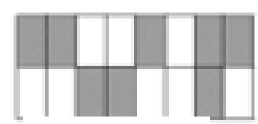
7. Escriba la fracción que representa la superficie sombreada en cada rectángulo.



En números



En números



En números

¿Se puede afirmar que la superficie sombreada en cada rectángulo es la misma? Justifique su respuesta